Galois

Biografia (França, 1811-1832).

Évariste Galois foi um matemático de impressionante precocidade. A sua vida foi digna de um filme, tendo morrido num duelo ainda muito jovem. Entre os seus feitos está o estudo das equações algébricas e o lançamento da teoria de grupos.

GALOIS

10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se

FICHA EDITORIAL
TÍTULO: A teoria de grupos + o Puzzle do 15
AUTOR: Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva
REVISÃO: Edimpresa
IMPRESSÃO E ACABAMENTO: Norprint **DATA DE IMPRESSÃO:** JUNHO 2007
DEPÓSITO LEGAL: 261140/07 **ISBN:** 978–989612270–6

JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS

10 matemáticos, 10 quebra-cabeças, 10 livros de bolso. De Tales a Conway, cada livro contém informação sobre a vida e obra de um dos maiores matemáticos da humanidade, bem como a descrição e análise de um *puzzle*, que é reproduzido em madeira e faz parte desta colecção.

Veremos que Arquimedes inventou um *puzzle* diabólico há mais de dois mil anos *(Stomachion)* ou que o *Pentagrama*, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou, ainda, que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a *puzzles*, como as *Torres de Hanói*, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o percursor do *Sudoku*. E, para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico.
Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

ÉVARISTE GALOIS

Évariste Galois (1811-1832)

A vida e obra do francês Évariste Galois é certamente um dos episódios mais apaixonantes da história da matemática. Já foram feitos filmes sobre alguns matemáticos. O leitor recordará o galardoado *Mente Brilhante*, filme de 2001, de Ron Howard, sobre John Nash. Em breve, o realizador Stephen Fry dirigirá um filme sobre o célebre matemático indiano Srinivasa Ramanujan. No entanto, devemos dizer que a vida de Évarist Galois, embora curtíssima, tem níveis de excelência, drama, genialidade, que dariam, talvez, um guião ainda mais fantástico.

Galois nasceu nos arredores de Paris, em 25 de Outubro de 1811. O seu pai, Nicolas Gabriel Galois, foi eleito prefeito de Bourg-la-Reine quando Évariste tinha apenas quatro anos de idade. Nicolas Gabriel era um homem culto e durante seu mandato teve o respeito da comunidade. Aqui terá nascido o interesse de Galois pela política.

Até aos doze anos viveu em casa dos seus pais e teve a sua mãe como única professora. Sendo assim, herdou o gosto pela ciência e vontade de querer saber da mãe e as ideias liberais do seu pai.
Em 1823, entrou para o liceu Louis-le-Grand. E aqui, antes de continuarmos, devemos abordar duas características fundamentais que tornaram Galois único.

A primeira, prende-se com a sua fantástica precocidade. Não são assim tão raras as figuras precoces em algumas áreas. A matemática, a música e o xadrez têm muitos exemplos: Pascal compôs um belíssimo tratado sobre cónicas aos dezasseis anos, Mozart foi apresentado pela Europa com apenas cinco anos, José Raul Capablanca, aos 12 anos, derrotou o campeão cubano de xadrez. Galois foi um caso comparável a estes. Na sua curta vida deixou obra matemática absolutamente revolucionária. Para o leitor ter apenas uma ideia, a chamada Teoria de Galois é objecto fundamental nos cursos de matemática pura nos dias de hoje.

A segunda, prende-se com algo comum aos grandes génios da cultura humana: o acto de pensar pela própria cabeça. Não pense o leitor que esta é uma característica fácil. O confronto de ideias com o conhecimento existente numa época é recheadíssimo de dificuldades e o percurso de Galois é um exemplo deste confronto. Repare-se nesta nota de um dos seus professores do liceu Louis-le-Grand:
"Nunca sabe mal uma lição; ou nem sequer a leu, ou sabe-a muito bem".
Quer isto dizer que, ou o assunto lhe interessava e compreendia-o até ao seu âmago, ou então nem sequer o lia. Esta foi também uma característica conhecida de Albert Einstein.

Em 1826, com quinze anos, frequentou a disciplina de Matemáticas Preparatórias e deu-se a sua revelação. Leu toda a Geometria de Legendre. Não satisfeito, estudou a obra de Lagrange (Legendre e Lagrange foram proeminentes matemáticos).

Por volta desta data, começa a investigar um dos grandes problemas da sua vida, a resolução das equações de quinto grau.

Lycée Évariste Galois em França

Galois estudava directamente dos livros escritos pelos melhores da sua época. No entanto, a sua genialidade era simultaneamente o seu maior obstáculo. As soluções que desenvolvia eram demasiado inovadoras para serem bem julgadas pelos seus professores. Além disso, Galois era de trato difícil, não gostava de ter de responder no quadro, olhava com desprezo para as pessoas que não o compreendiam. Fazia também muitos cálculos mentais, sem os escrever, o que confundia os seus professores.

Em 1827, tem a primeira grande decepção da sua vida. Galois sonhava entrar na École Polytechnique, que era simultaneamente o mais prestigiado colégio do país, como instituição defensora dos ideais de liberdade que lhe eram caros. Os seus examinadores, lamentavelmente pouco inspirados, recusaram-lhe o ingresso. No ano seguinte, tentou novamente e foi examinado por um tal Monsieur Dinet. Efectuando muitos saltos lógicos nas argumentações do seu exame oral, que deixaram Dinet desorientado, Galois sentiu que ia ser reprovado pela segunda vez. Ao contradizer Galois num passo em que este tinha razão, Dinet não se salvou de levar com uma esponja na cara...

Para cúmulo, no mesmo ano, dá-se o suicídio do pai, vítima de uma cabala. Ao ver o sistema político de França matar o seu pai, Galois tornou-se fervoroso pela causa republicana. Com a vida amargurada por todos estes episódios, teve de se resignar em ir para a École Normal Supérieure. Já em 1831, devido às suas causas políticas, publicou um ataque ao director do estabelecimento, que resultou na sua expulsão.

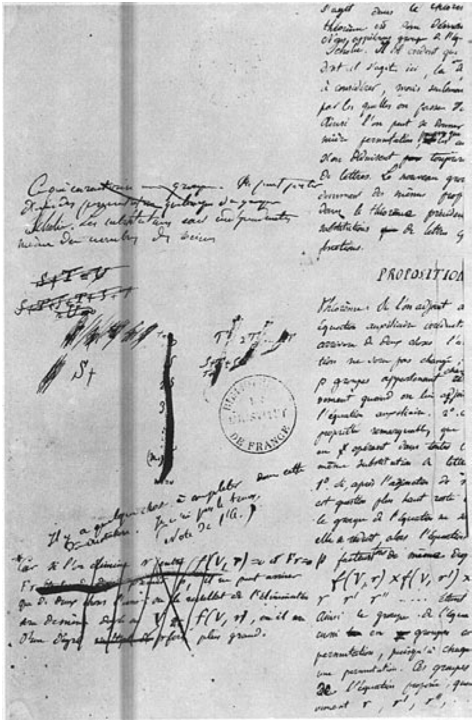
Um pouco mais tarde, na sequência de palavras ousadas contra o rei, foi preso. Mas não se ficou por aqui. Depois de ser solto, foi preso novamente por porte ilegal de fardamento. A sociedade decidiu colocar este génio da matemática na cadeia, em vez de o aproveitar.

Na cadeia, Galois entrou em estado depressivo, tentando o suicídio. Em 1832, um pouco antes da sentença, os presos de Sainte-Pélagie foram vítimas de um surto de cólera. Foi transferido para uma casa de saúde, onde iria conhecer uma mulher que seria a causa da sua morte.

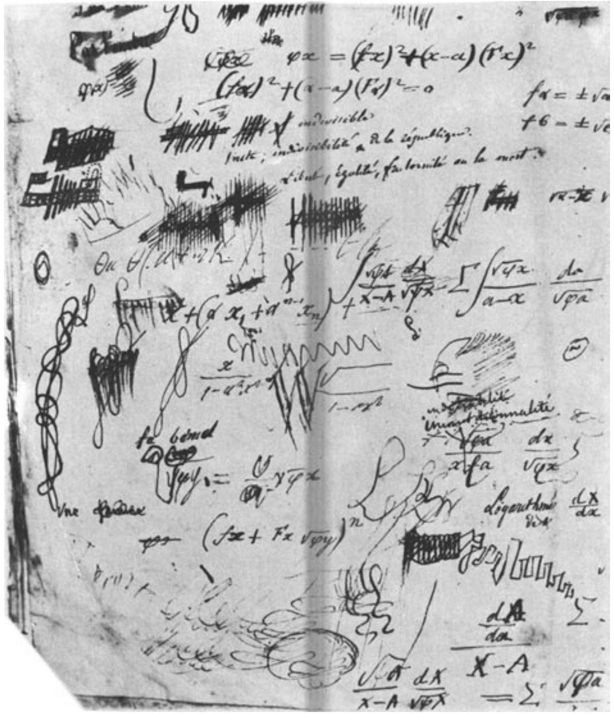
Chega então o clímax desta história de vida. Tem havido muita especulação sobre este período, mas Galois terá iniciado um romance com Stéphanie-Félice Poterine, filha de um médico respeitado. Stéphanie já tinha um compromisso com o cidadão Pescheux d'Herbinville, que, como não podia deixar de ser, descobriu tudo. Ficando furioso, e sendo um belíssimo atirador, desafiou Galois para um duelo. Nos dias anteriores a este duelo, marcado para 30 de Maio de 1832, pressentindo a sua morte, Galois escreveu um testamento científico, tendo como interlocutor o matemático Chevalier. Reuniu à pressa as suas investigações (muitas das quais são matemática de ponta ainda hoje), onde incluiu a espantosa frase "não tenho tempo". É difícil imaginar sequência mais poética do que esta. Imagine o leitor, naquela hora, um jovem, consciente do conteúdo matemático existente na sua cabeça, e da importância que trazia para o conhecimento humano e, ao mesmo tempo, com a morte anunciada, escrever a todos nós que não tem tempo. O que poderia ter avançado a matemática se lhe tivessem dado mais tempo...

Nessa mesma altura escreveu uma carta aos republicanos que terminou ao estilo de Jesus Cristo:
"Perdão para aqueles que me mataram, são de boa fé".

No dia 30, pela manhã, um homem ferido com um tiro no ventre foi levado para o hospital. Morreu às dez da manhã de 31 de Maio de 1832.



Carta de Galois: pode ver-se à esquerda, na zona por baixo do carimbo, *"Je n'ai pás le temps"*



Carta de Galois: no meio do caos, pode ver-se à esquerda, em baixo, as palavras *"une femme"*

OBRA DE GALOIS O GRUPO DAS PERMUTAÇÕES

Para que se possa dar uma ideia sobre a obra matemática de Galois, temos de começar por abordar a história da resolução de equações algébricas. Eis alguns exemplos de equações:

$x - 1=0$ é uma equação de primeiro grau (o maior expoente de x é um);

$x^2 + x + 1=0$ é uma equação de segundo grau (o maior expoente de x é dois);

$x^5 + x + 4=0$ é uma equação de quinto grau (o maior expoente de x é cinco).

O objectivo ao resolver uma equação deste género é determinar as concretizações de x que tornam a igualdade verdadeira. Por exemplo, em relação à primeira equação da lista anterior, $x=1$ é solução porque $1-1=0$.

EQUAÇÃO DE 1º GRAU

A equação geral de primeiro grau pode ser colocada, na escrita moderna, da seguinte forma, onde x é a incógnita e a e b números genéricos:

$$ax + b=0 \quad (a \text{ diferente de zero})$$

Há muito que se sabe resolver este tipo de equações. A sua solução é $x = -\frac{b}{a}$. Para se entender como se chega a tal solução, repare-se na seguinte imagem:

No braço esquerdo estão dois objectos iguais, dos quais desconhecemos o peso. Se quiséssemos exprimir o equilíbrio da balança, usando x para designar o peso desconhecido, obteríamos a seguinte expressão:

$$2x + 2 = 14$$

A utilização da incógnita x serve mesmo para isso: para nos referirmos ao peso desconhecido.

Repare-se que se começarmos por retirar dois kg dos dois pratos, mantemos o equilíbrio, passando para a seguinte situação:

Isto corresponde a escrevermos:

$$2x+2=14 \Leftrightarrow 2x+2-2=14-2 \Leftrightarrow 2x=12$$

onde o símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a".
Em seguida, se tomarmos a metade nos dois pratos da balança, obtemos a seguinte situação:

Isto corresponde a escrevermos:

$$2x=12 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{12}{2} \Leftrightarrow x=6$$

O valor do peso desconhecido é 6 kg.

Ou seja, a chave para a resolução da equação de primeiro grau é simples: desde que façamos operações válidas em ambos os membros de uma igualdade, mantemos a igualdade. Sendo assim, basta procurar isolar a incógnita para descobrir o seu valor:

$$ax+b=0 \Leftrightarrow ax+b-b=0-b \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow \frac{ax}{a}=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$$

EQUAÇÃO DE 2º GRAU

No início desta secção, apresentámos um exemplo de uma equação de segundo grau: $x^2+x+1=0$. Em geral, uma equação de segundo grau pode ser colocada na escrita moderna da seguinte forma, onde x é a incógnita e a, b e c, números genéricos:

$ax^2+bx+c=0$ (a diferente de zero)

Tal como as equações de primeiro grau, estas já aparecem em registos históricos da Antiguidade. Nas placas de barro da Babilónia, podemos encontrar muitos problemas deste tipo. Ocorrem enunciados como "Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado e obtive 0,75, quanto mede o lado?". Hoje em dia, este problema podia ser equacionado da seguinte forma:

$$x^2+x=0{,}75$$

Placa BM 13901

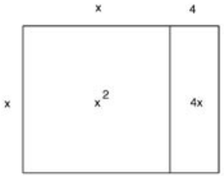
As primeiras abordagens de resolução deste tipo de equações utilizam uma técnica denominada "completar o quadrado". Os babilónios já utilizavam essa técnica. Imagine o leitor quem tem a equação:

$$x^2+4x=77$$

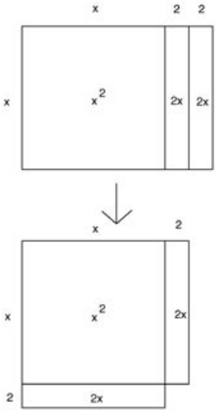
que é equivalente a

$$x(x+4)=77$$

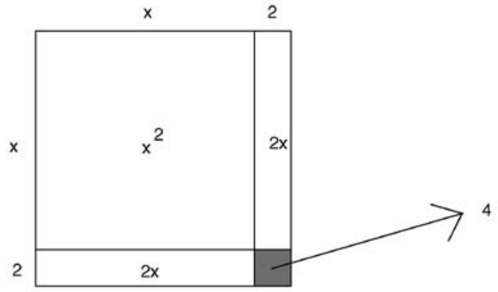
Podemos pensar que $x(x+4)$ traduz a área de um rectângulo de lados x e $x+4$:



Uma vez que $4x=2x+2x$, podemos arrumar a figura de outra forma:



Em relação a estas figuras, sabemos que a sua área global é igual a 77. É neste momento que utilizamos um raciocínio de "completar o quadrado", acrescentando 4 unidades de área:



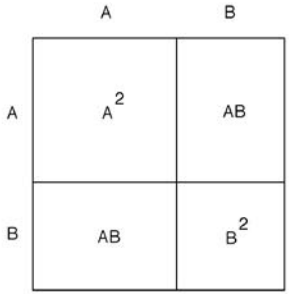
Depois de completar o quadrado, passamos a ter $x^2+4x+4=81$, ou seja $(x+2)^2=81$. Como a raiz quadrada de 81 é igual a 9, temos que $x+2=9$, donde $x=7$ é uma solução da equação. É claro que os números negativos não tinham na Antiguidade o tratamento que têm hoje e, consequentemente, não eram encarados como soluções. Hoje, na resolução da equação $x^2+4x=77$, também se apresenta a solução $x=-11$, uma vez que $(-11+2)^2 = (-9)^2$ também é igual a 81.

Na Grécia, encontramos nos *Elementos* de Euclides métodos geométricos para resolver equações de segundo grau. Na Índia, as equações de segundo grau foram alvo de um tratamento mais algébrico. Esta nova forma de apresentação deve-se a Al-Kwarizmi (ver nono livro desta colecção).

Tal como a resolução de equações de primeiro grau, a resolução de equações de segundo grau é um objectivo do nosso ensino pré-universitário. Muitos têm presente a famosa fórmula resolvente. Fazendo um pouco de esforço, podemos compreender como se deduz a dita fórmula. Primeiro, tem de se ter presente uma igualdade simples, usualmente denominada de caso notável da multiplicação (quadrado da soma):

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

Esta expressão também tem uma interpretação geométrica:



Partindo agora da nossa equação de segundo grau, $ax^2+bx+c=0$, começamos por dividir ambos os membros da igualdade por a, obtendo:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Agora, tal como na técnica da completação do quadrado, que "fazia aparecer um quadrado", vamos forçar aparecer o seguinte desenvolvimento do caso notável:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

Para isso vamos ter de somar e subtrair $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

É daqui que sai a fórmula resolvente para a equação de segundo grau que muitos leitores certamente recordarão:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Convém dizer que aqui surge o problema de a quantidade b^2-$4ac$ poder ser negativa e a raiz de um número negativo ser um embaraço. O problema das raízes quadradas negativas reside no facto de, pela regra dos sinais da multiplicação (mais por mais dá mais, menos por menos dá mais) o quadrado de um número ser sempre positivo. Por exemplo 2x2=4, (-2)x(-2)=4. No entanto, este embaraço é resolvido com uma argumentação simples: sempre que a utilização da fórmula é necessária para resolução de um problema concreto e se dá o caso da quantidade exposta ser negativa, o problema não tem solução. Esta interpretação está de acordo com a prática e o assunto fica resolvido. Como veremos à frente isto tem muito que se lhe diga...

EQUAÇÕES DE 3º E 4º GRAUS

Quando se fala do estudo da equação de terceiro grau é inevitável falar de dois matemáticos da Renascença, Nicolo Fontana de Brescia (1500-1557), mais conhecido por Tartaglia, e Gerolamo Cardano (1501-1576).

À esquerda, Nicolo de Brescia.
À direita, Gerolamo Cardano

Cardano, no seu livro *Ars Magna*, escreve que o bolonhês Scipione del Ferro descobrira um método para resolver equações do tipo

$$x^3+px=q \text{ (com } p \text{ e } q \text{ positivos)}$$

Na época, era costume os sábios desafiarem os rivais com a resolução de problemas. Scipione terá desafiado Tartaglia a resolver $x^3+6x^2+8x=1000$ e $x^3+3x^2=5$. A resposta não foi dada imediatamente. No entanto, mais tarde, Scipione desafiou-o novamente com equações do tipo $x^3+px=q$ e obteve resposta de forma pronta junto com novos problemas que o próprio Scipione não foi capaz de resolver. Cardano, interessado no assunto, prontamente trocou correspondência com Tartaglia que lhe deu a chave para a resolução de um caso da equação de terceiro grau na forma de poema. Cardano jurou a Tartaglia que não divulgaria a regra.

Apesar do juramento, Cardano publicou a solução da cúbica no seu *Ars Magna*, em 1545. Tartaglia, no ano seguinte, descreve o seu método de resolução na sua obra *Quesiti et Invenzioni diverse*. É claro que tudo isto gerou muita polémica...

Em 1575, outro italiano chamado Raphael Bombelli publicou um livro em que descreve as ideias de Cardano e de Tartaglia. Bombelli apresenta como exemplo a equação:

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

É fácil verificar que x=4 é solução desta equação. No entanto, ao utilizar os trabalhos de Cardano e de Tartaglia, Bombelli obteve

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

E agora? Como interpretar isto? Por um lado, Bombelli sabia, por inspecção directa, que 4 é solução da equação, por outro, aparece na fórmula a raiz quadrada de um número negativo. Desta vez, dá-se um desfasamento entre a realidade e a aparição de raízes quadradas de números negativos.

Surge então uma ideia surpreendente. Não será boa ideia deixar existir raízes de números negativos, para se poder continuar os cálculos? Não será que se continuarmos os cálculos com esses números podemos chegar a boas soluções?

É neste momento que surgem os números complexos. Muitas vezes, é dito que os complexos foram descobertos. No entanto, há uma diferença entre descobrir e inventar. Foi a imaginação humana que deixou existir raízes de números negativos. Mas esta invenção surge para nos resolver problemas. Os números imaginários como $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-121}$, etc., são usados como uma ponte. Nós recorremos a eles para “passar por cima” do embaraço causado por cálculos aparentemente impossíveis. Por vezes, esse “passar por cima” resulta bem e chegamos novamente a soluções bem reais. Não é por acaso que se chamou $\sqrt{-1}$ de unidade imaginária (representado pelos matemáticos pela letra i).

Voltando ao exemplo, Bombelli decidiu trabalhar como se raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números. Assumindo naturalmente que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$, constatou que

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121} \text{ e } (2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}$$

Sendo assim, temos como solução

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

Nas palavras do próprio Bombelli:
"Achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras (...) No princípio, tudo me pareceu mais baseado em sofismas do que na verdade, mas procurei até achar uma prova."

Na sequência dos debates Cardano-Tartaglia, o matemático bolonhês Lodocivo Ferrari, discípulo de Cardano, descobriu uma forma de reduzir o estudo de equações de quarto grau ao estudo de equações de terceiro grau.

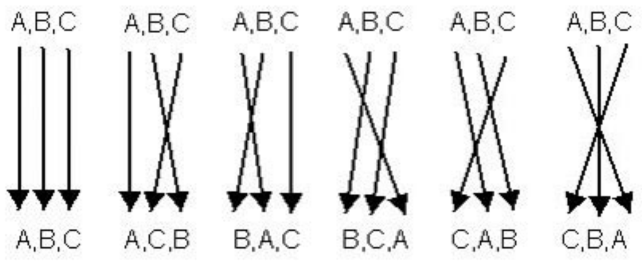
EQUAÇÕES DE 5º GRAU E PARA LÁ...

No filme de Stanley Kubrick, *2001 Odisseia no Espaço*, há uma sequência a que o realizador chama *Júpiter e para além do infinito*. No filme, que metaforicamente representa a grande viagem humana, como seria de esperar, o fim é deixado em aberto. O que Galois mostrou foi que a equação de quinto grau corresponde ao fim da viagem pela história da resolução de equações algébricas. No entanto, há uma diferença em relação ao *2001* de Kubrick: Galois não deixou o problema em aberto. Mostrou que, para o caso da equação de quinto grau, bem como para as de grau superior, já não é possível apresentar uma fórmula resolvente utilizando um número finito de adições, multiplicações e extracção de raízes.

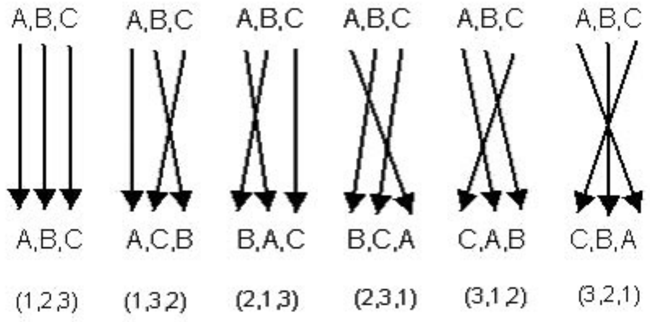
Galois introduz a nomenclatura sobre permutações (a que chama "substituições") de várias letras ou variáveis. Imagine o leitor que tem a sequência de letras:

A,B,C

Podemos reordenar estas letras de seis formas diferentes:



Cada reordenação pode ser encarada como o efeito de uma "aplicação" no terno A,B,C. Por exemplo, a aplicação que transforma A em A, B em C e C em B corresponde a deixar a primeira imóvel e a trocar a segunda com o terceira. No entanto, um diagrama com setas é uma forma pouco expedita para nos referirmos a aplicações deste tipo. É mais fácil arranjar uma forma mais simbólica:



Quando olhamos para (1,3,2) pensamos numa aplicação que se pode aplicar sobre qualquer conjunto de três elementos. Deixa o primeiro imóvel e troca o segundo com o terceiro. Se tivermos, por ordem, um rato, um gato e

um cão e aplicarmos a permutação (1,3,2) a este conjunto, passamos a ter, por ordem, um rato, um cão e um gato.

Cada número natural está associado a um conjunto de permutações, por exemplo, ao 5 corresponde o grupo das permutações de cinco objectos (os matemáticos chamam-lhes grupos de permutações). No caso do três, observámos que o grupo de permutações associado tem seis elementos. O número quatro seria 24, etc.

Galois conseguiu chegar à "chave" do problema das equações. Consideremos, por exemplo, a equação $x^2-4x+1=0$. Utilizando a fórmula resolvente relativa às equações de segundo grau, podemos ver que as suas soluções são:

$$A=2+\sqrt{3}$$
$$B=2-\sqrt{3}$$

Muitas condições verdadeiras podiam ser escritas com estes dois números. Por exemplo,

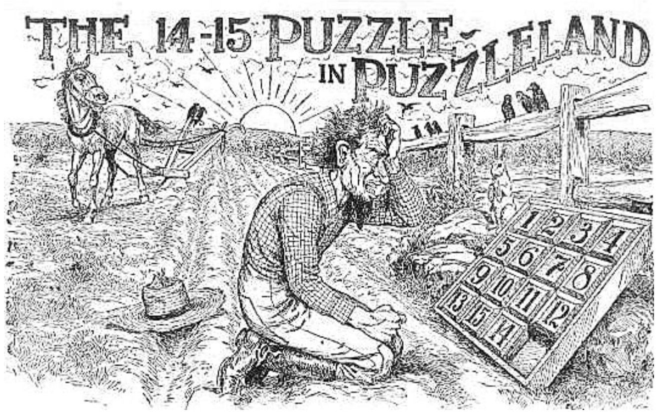
$$A+B=4$$
$$AB=1$$

O que é impressionante é que qualquer que fosse a equação algébrica envolvendo A, B e coeficientes racionais (isto é, números inteiros e fracções), poderíamos trocar A por B e B por A, mantendo a sua veracidade. Neste caso, as soluções $2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$ são indistinguíveis por expressões desse tipo. Experimente o leitor escrever uma equação algébrica envolvendo estes dois números, utilizando apenas coeficientes racionais e verá que pode substituir simultaneamente $2+\sqrt{3}$ por $2-\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$ por $2+\sqrt{3}$. Ou seja, para manter as condições verdadeiras, tanto podemos aplicar a {A,B} a permutação (1,2) que deixa tudo na mesma, como a permutação (2,1), que troca A com B.

Galois mostrou que cada equação algébrica tem o seu conjunto de permutações associado (o chamado grupo de Galois). Em seguida, e de forma que não podemos explicitar aqui, mostrou que existem equações de quinto grau que têm um grupo de Galois tão complexo que faz com que essas equações já não tenham direito a ter uma fórmula resolvente utilizando um número finito de adições, multiplicações e extracção de raízes.

Agora o leitor já pode ter a percepção do desespero que foram os dias anteriores ao fatídico duelo. Galois tentava deixar por escrito como chegar ao fim desta viagem!

O PUZZLE DO QUINZE

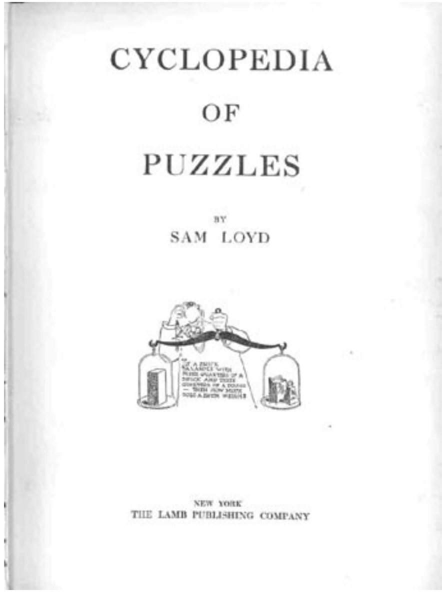


GRAVURA RETIRADA DO *CYCLOPEDIA OF PUZZLES* RELATIVA AO *PUZZLE DO QUINZE*

Samuel Loyd nasceu em Filadélfia, nos EUA e foi um grande inventor de *puzzles* e charadas matemáticas. Toda a sua vida foi dedicada à matemática recreativa e ao xadrez, tendo dado um valioso contributo em ambas as áreas.

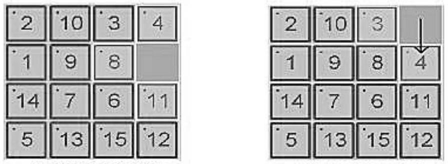
SAMUEL LOYD (1841-1911)

Após a sua morte, em 1914, o seu filho e colaborador (também chamado Sam Loyd) publicou uma das suas obras mais importantes — o clássico *Cyclopedia of Puzzles*. Na altura em que lançamos este texto, o *Cyclopedia of Puzzles* pode ser encontrado na íntegra (e bastante bem ilustrado) em http://www.mathpuzzle.com/loyd/.

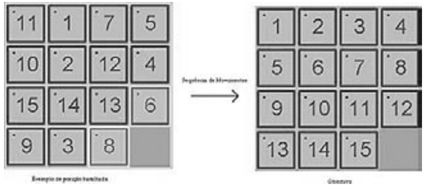


Contracapa de uma edição
do *Cyclopedia of Games* de Sam Loyd

Um dos temas presentes no *Cyclopedia of Puzzles* trata de um jogo que consiste numa placa com 15 quadrados numerados de 1 a 15, móveis na vertical e horizontal, cujo movimento é garantido por um espaço vazio. “Desarrumando” a placa, o objectivo do *puzzle* consiste em ordenar os números através de uma sequência de movimentos. Sam Loyd defendeu ser autor deste *puzzle*, desde 1891 até à sua morte, no entanto, a autoria do jogo pertence a Noyes Palmer Chapman que o tentou patentear sem sucesso em 1880, por já haver ideias muito semelhantes.

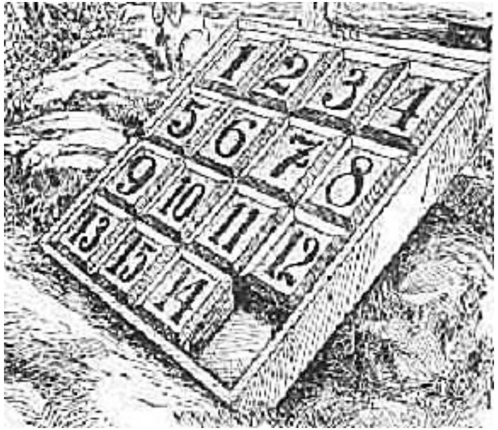


Exemplo de movimento no *Puzzle do Quinze*



Partindo de uma posição baralhada,
o objectivo consiste em ordenar os números

É vital referir que na obra de Loyd, o *puzzle* é apresentado com uma posição inicial com o 14 e o 15 trocados (*puzzle* 14-15). Vejamos o pormenor da ilustração existente no *Cyclopedia*:



Puzzle do Quinze TAL COMO É APRESENTADO NO *CYCLOPEDIA*

O objectivo consistia, partindo dessa posição, em corrigir o erro de ordenação. Citando o *Cyclopedia*:

"(...) *Foi oferecido um prémio de 1000 dólares para a primeira solução correcta do problema, que nunca foi reclamado, apesar de muita gente que afirma ter conseguido resolver a tarefa. As pessoas ficaram enfeitiçadas com o problema e ouviram-se inúmeras histórias absurdas sobre comerciantes que se esqueceram de abrir as suas lojas e de um notável membro do clero que ficou toda uma noite de Inverno na rua, debaixo de um candeeiro, tentando lembrar-se do modo como o tinha resolvido.* (...) *Houve casos de agricultores que abandonaram as suas charruas, e eu aproveitei o exemplo para fazer a ilustração.* (...)"

Aconselhamos o leitor a não tentar resolver o *puzzle do quinze* a partir da posição apresentada por Loyd...

O *puzzle*, tal como Loyd o apresenta, é impossível e daí que o prémio não possa ter sido reclamado. A análise dessa impossibilidade pode ser feita recorrendo a ideias relativas às permutações, como veremos na próxima secção.

PUZZLE 14-15 E SUA IMPOSSIBILIDADE

Neste texto, ao contrário do que aconteceu nos anteriores, pretendemos mostrar qual é a razão do *puzzle* de Loyd **não** ter solução. Não vamos abordar a solução de um *puzzle*, mas sim a **não existência** de solução. Muitas questões matemáticas são respondidas pela negativa. O mundo não é perfeito, mas mais vale sabermos que um desafio não tem solução do que ficarmos na dúvida e na eterna procura. Aliás, resolver um problema pela negativa é resolver um problema.

Temos de começar por abordar o conceito de permutação par e permutação ímpar. Para determinar a paridade de uma permutação, basta contar o número de inversões. Por exemplo:

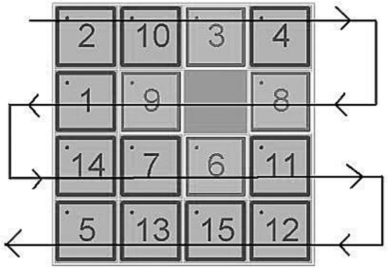
(1,3,4,2) — o três é maior do que dois e aparece antes; o quatro é maior do que dois e aparece antes. A permutação tem duas inversões e portanto é par.

(1,4,3,2) — o quatro é maior do que três e aparece antes; o quatro é maior do que dois e aparece antes; o três é maior do que dois e aparece antes. A permutação tem três inversões e portanto é ímpar.
Chamamos transposição consecutiva a uma troca de dois elementos seguidos. Por exemplo (1,3,2,4), troca o segundo com o terceiro.

Se uma permutação pode ser obtida de outra através de uma composição de um número par de transposições consecutivas, as duas têm a mesma paridade. Se uma permutação pode ser obtida de outra através de uma composição de um número ímpar de transposições consecutivas, as duas têm paridades diferentes.

A chave para a argumentação da impossibilidade consiste em associar as posições da placa e as permutações de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} e em perceber a forma como cada movimento físico na placa muda ou não a permutação associada e a respectiva paridade.
Podemos associar a cada posição do *puzzle* uma per-

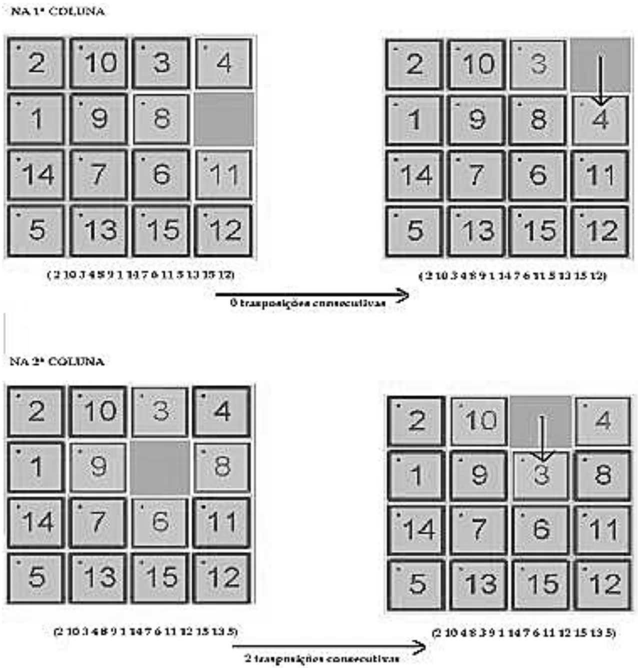
mutação, ignorando o espaço vazio e lendo os números "em serpente". Vejamos o que queremos dizer com o seguinte exemplo:

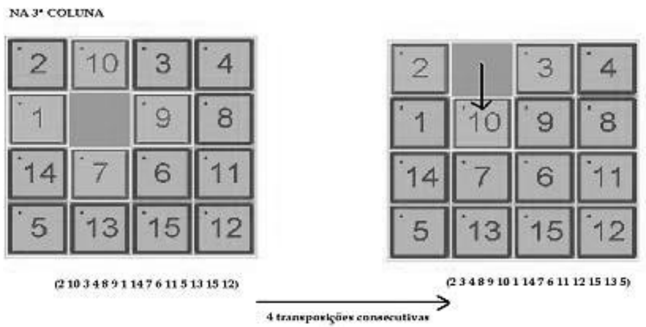


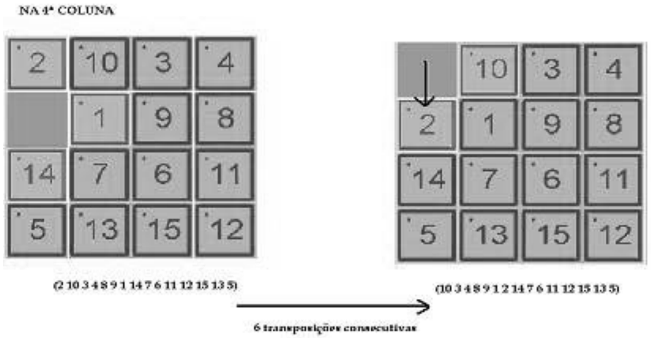
Permutação Associada: (2 10 3 4 8 9 1 14 7 6 11 12 15 13 5)

Podemos tirar as seguintes conclusões quanto aos movimentos:

a) Os movimentos na horizontal não mudam a permutação e, portanto, não mudam a sua paridade;
b) Os movimentos na vertical correspondem a 0, 2, 4 ou 6 transposições consecutivas e, portanto, não mudam a sua paridade. Pode constatar-se facilmente este facto através das figuras seguintes:







Sendo assim, definida esta forma de associação entre as posições na placa e as permutações de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, constata-se que não há forma física, através dos movimentos legais, de mudar a paridade das permutações correspondentes às diversas posições. Dada esta forma de associação, todas as posições corresponderão a permutações com a mesma paridade da permutação correspondente à posição inicial.

Neste ponto, o leitor perguntará como isto ajuda a justificar o facto de ninguém ter conseguido ganhar os 1000 dólares, ou seja, o facto do *puzzle* proposto por Loyd ser impossível. A resposta é simples. Voltando ao nosso exemplo, a posição inicial corresponde à permutação {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13} que é par e a posição objectivo corresponde à permutação {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13} que é ímpar. Uma vez que a paridade é diferente, é impossível através dos movimentos legais efectuar a dita troca.