A civilização que eclodiu entre os rios Tigre e Eufrates criou a escrita e os registos matemáticos mais antigos que se conhecem. A história da nossa cultura tem na Babilónia a sua primeira marca fundamental. Da literatura à arte, da astronomia ao direito, a Mesopotâmia deixou-nos obras fascinantes.

O Real Jogo de Ur (ou simplesmente Jogo de Ur), encontrado nas mais luxuosas criptas, mostra-nos um pouco desta cultura longínqua.

10 Livros, 10 Regiões, 10 Jogos para aprender e divertir-se

Grécia – Petteia 10/07/08
China – Xiang-Qi 17/07/08
Babilónia – Ur 24/07/08
Egipto – Senet 31/07/08
Índia – Shaturanga 07/08/08
Japão – Shogi 14/08/08
África – Bao 21/08/08
Indonésia – Surakarta 28/08/08
América pré-colombiana – Awithlaknannai 04/09/08
Europa – Hex 11/09/08

FICHA EDITORIAL
Titulo Babilónia - Ur
Autor Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva
Revisão Edimpresa
Impressão e acabamento Norprint
Data de impressão Junho 2008
Depósito Legal 278363/08

A Matemática Babilónica

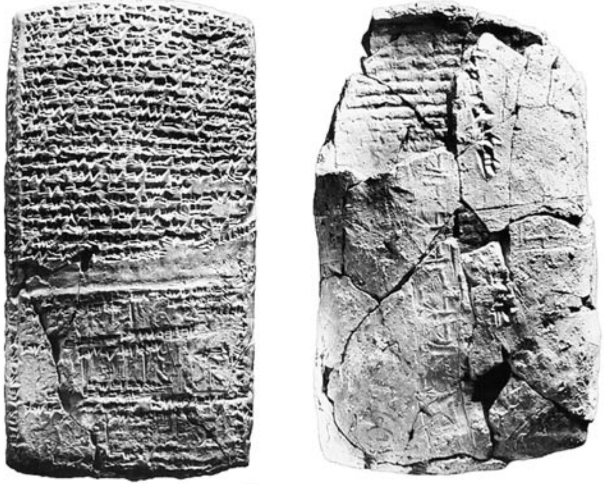
A civilização mesopotâmica nasceu no quinto milénio a.C. com os sumérios na zona limitada pelos rios Tigre e Eufrates. A organização social e política caracterizava-se pelas Cidades-Estado. Algumas delas formaram autênticos impérios, ainda que efémeros, como Ur. A unificação dá-se com a dinastia dos acádios, entre 2350 e 2150 a.C. Pouco depois, a Terceira Dinastia de Ur expandiu-se e ficou em controlo de toda a região Sul da Mesopotâmia. Foi aqui que nasceu a tradição dos escribas, treinados para as exigências da administração burocrática do território. Essa tradição sobreviveu ao domínio de Ur, que colapsou por volta do ano 2000 a.C. A Cidade-Estado da Babilónia conseguiu o controlo de toda a região pelo ano 1700 a.C. sob o comando de Hamurábi, que produziu o célebre *Código*, base legal para administrar o seu vasto território. Esta é a razão por que usamos o termo *Babilónia* no lugar de *Mesopotâmia*. A matemática babilónica engloba todas as tradições matemáticas dos povos mesopotâmicos desde o quinto milénio a.C.

Mesopotâmia, com o Tigre e o Eufrates realçados

A escrita surgiu aqui no fim do quarto milénio a.C. (e no Egipto aproximadamente ao mesmo tempo). A causa próxima parece ter sido de natureza contabilística: era necessário registar a circulação de pessoas e bens.

No início, a escrita foi pictórica, à semelhança da egípcia, mas evoluiu para o sistema cuneiforme, que se baseia em marcas feitas em barro fresco por varetas de secção triangular (em forma de cunha).

As placas assim gravadas podiam até ter envelope, também de barro, como na figura.



Tabuinha de barro com escrita cuneiforme e respectivo envelope

Para registar diferentes quantidades de artigos, como os cereais, tornou-se conveniente dispor de diversas unidades de medida. Em algumas destas medidas uma unidade valia sessenta unidades de categoria imediatamente inferior. Parece ter sido esta a origem do sistema de numeração que desenvolveram, o sistema sexagesimal, que pelo terceiro milénio a.C. já estava difundido pela Mesopotâmia.

O nosso sistema numérico diz-se decimal porque utiliza potências de 10 para representar números. Por exemplo, quando escrevemos 2345 estamos a usar uma convenção para abreviar

$$2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5$$

que também se pode escrever:

$$2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5$$

ou ainda

$$2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

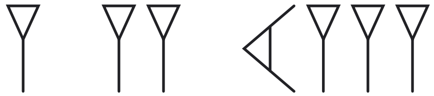
se acordarmos que $10^1=10$ e $10^0=1$.

Em vez de 10, os babilónios usavam 60. A razão para a escolha do 60 permanece obscura, mas pode ter residido no facto de 60 ter muitos divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30), o que viabiliza a representação de muitas fracções por números inteiros (por exemplo, metade de 60 é 30, um terço é 20, um quarto é 15, etc.).

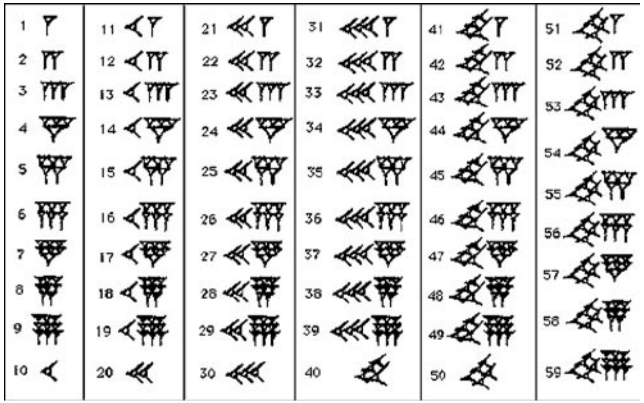
Como já referimos, a escrita era cuneiforme, e a representação dos números também. Um golpe vertical do estilete representava 1, um horizontal representava 10.

1 10

Assim, para representar o número 3733, notando que $3733 = 3600 + 120 + 13 = 1 \times 60^2 + 2 \times 60 + 13$, ter-se-ia:



Vamos seguir a convenção habitual de substituir os símbolos cuneiformes pelos nossos algarismos familiares.



Númeração cuneiforme da Babilónia

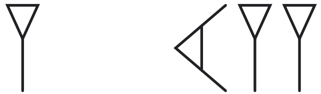
Para separar as casas sexagesimais usaremos vírgulas.

Com esta notação, a representação do número 3733 será 1,2,13.

Milhares de tabuinhas de barro sobreviveram até aos nossos dias e, a partir do século XIX, começaram a ser traduzidas (H. Rawling foi o primeiro a compreender a escrita cuneiforme em meados do século XIX). Muitas delas contêm textos matemáticos, nomeadamente tabuadas e problemas.

Problemas matemáticos do século XIX a.C.

Uma das dificuldades na leitura dos documentos matemáticos babilónicos advém do facto da não existência de zero. Se para representar a ausência de uma potência de 60 bastava deixar um espaço no local correspondente, como, por exemplo, para representar $3612 = 3600 + 12$:



$$3622 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 12$$

o mesmo não sucedia se a casa sexagesimal em questão fosse a última. Por exemplo:

é representação de $3 \times 60 + 10$, ou de $3 \times 60^2 + 10 \times 60$, ou... só o contexto pode responder.

Acresce, ainda, que os babilónicos usavam potências negativas da base 60. Relembremos a situação na nossa base decimal. Quando escrevemos 32,78 queremos dizer:

$$3 \times 10 + 2 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2}$$

Na escrita cuneiforme, a representação:

poderia exprimir:

$$3 + \frac{10}{60}$$

A convenção habitual é que representemos a vírgula sexagesimal por ";". Pode parecer estranho, mas funciona bem. Experimentemos com o número sexagesimal 0;1,15. Temos:

$$0;1{,}15 = \frac{10}{60} + \frac{15}{60^2} = \frac{1}{48}$$

Para efectuarem contas de somar e subtrair cremos que os babilónios utilizavam algoritmos semelhantes aos nossos. Não há registos de procedimentos especiais nesta matéria. Aparentemente, os escribas eram exímios a somar e subtrair. Ao proceder aos cálculos, temos de estar atentos ao *e vai um* que nos é familiar, só que agora o *um* representa 60. Vejamos um exemplo, sempre em notação sexagesimal. Somemos 5,44 a 59,20. Começamos por somar as unidades: 44 + 20 e obtemos 64 que, em sexagesimal, se escreve 1,4. Assim, escrevemos 4 no resultado e… *vai um*, o que nos leva a escrever 1 na coluna dos 60:

$$\begin{array}{rrr} & 1 & \\ & 5 & 44 \\ + & 59 & 20 \\ \hline & & 4 \end{array}$$

Agora, temos de somar a coluna seguinte (a dos 60), cujas parcelas são 1, 5 e 59 num total de 65, isto é, 1,5 e temos o resultado final:

$$\begin{array}{rrr} & 1 & \\ & 5 & 44 \\ + & 59 & 20 \\ \hline 1 & 5 & 4 \end{array}$$

Isto é, 5,44 + 59,20 = 1,5,4. Este algoritmo corresponde aos cálculos seguintes:

$$5 \times 60 + 44 + 59 \times 60 + 20 = 5 \times 60 + 59 \times 60 + 60 + 4 =$$

$$= 65 \times 60 + 4 = (60 + 5) \times 60 + 4 = 60^2 + 5 \times 60 + 4$$

A subtracção segue princípios semelhantes. Experimentemos efectuar a conta 6,24 – 1,43 (notação sexagesimal). Começamos pelas unidades. Como de 24 não se pode tirar 43, temos de pedir emprestado à casa dos 60, que assim passa de 6 a 5, e escrevemos, notando que 60 + 24 = 84:

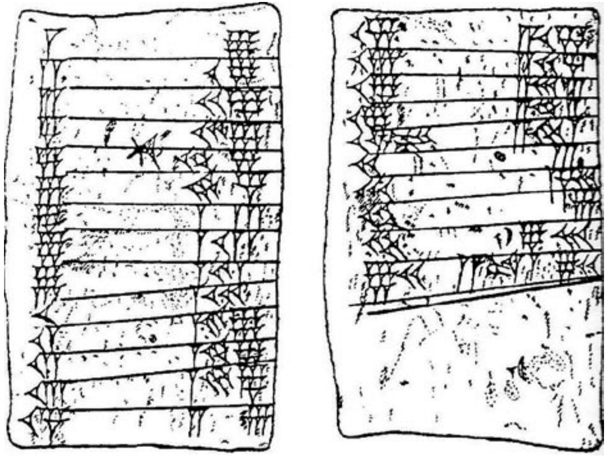
$$\begin{array}{rrr} & 5 & 84 \\ - & 1 & 43 \\ \hline & & 41 \end{array}$$

Agora, resta somente subtrair os números da coluna seguinte, o que não apresenta problema:

$$\begin{array}{rrr} & 5 & 84 \\ - & 1 & 43 \\ \hline & 4 & 41 \end{array}$$

Assim, 6,24 – 1,43 = 4,41.

A multiplicação fazia-se por um processo semelhante ao nosso, mas era necessário recorrer a tabuadas. Sobreviveram tabelas de múltiplos, que listavam, por exemplo, 2 × 9, 3 × 9, ... até 9 × 9 e ainda 20 × 9, 30 × 9, 40 × 9, 50 × 9. Para obter o produto de 34 × 9, um escriba somava o resultado de 30 × 9 = 4,30 com 4 × 9 = 36 para obter 5,6. Para números maiores recorriam a tabelas mais extensas.



Tabuada dos noves: 1 x 9 = 9, 2 x 9 = 18, ...

Para efectuar divisões usavam... a multiplicação! Interpretavam a divisão $a \div b$ como sendo a multiplicação de a pelo recíproco de b:

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

E para calcular este produto recorriam, mais uma vez, a tabelas. Desta vez, a tabelas de recíprocos. Conhecem-se várias tabuinhas, contendo pares de números cujo produto é a unidade (um é o recíproco do outro):

2	30
3	20
10	6
16	3,45
25	2,24
40	1,30

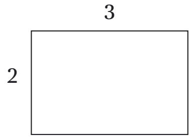
Tabela de recíprocos

Assim, para calcular $30 \div 25$ os babilónios, obtendo da tabela o recíproco de 25, calculavam o produto $30 \times 2{,}24$.

Muitos dos leitores são demasiado jovens para ter aprendido o algoritmo da raiz quadrada na escola primária. Os babilónios usavam um método iteractivo, isto é, um método que permite passar de uma aproximação a outra melhor, muito eficiente. Ilustrá-lo-emos com um exemplo.

Procuremos o valor de $\sqrt{6}$. Isto equivale a determinar o lado de um quadrado de área 6, já que $\sqrt{6}=x$ é o mesmo que dizer $x^2=6$ (não há números negativos envolvidos!).

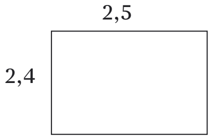
Ora nós sabemos que $6 = 2 \times 3$.



Um rectângulo de área 6

É natural concluir que se tem $2 < \sqrt{6} < 3$ (2 é menor do que $\sqrt{6}$ que, por sua vez, é menor do que 3).

Será que podemos obter um outro rectângulo, menos *desproporcionado*, com a mesma área? Se a resposta for afirmativa, um lado seu será uma melhor aproximação de $\sqrt{6}$ do que 2 ou 3. Isso é tarefa fácil, tome-se para um dos lados a média aritmética entre 2 e 3, que é 2,5 (estamos a usar a nossa escrita decimal). Quanto deve medir o outro lado? Como o produto dos dois deve dar 6, a sua medida será $6 \div 2{,}5 = 2{,}4$.



Aproximando $\sqrt{6}$

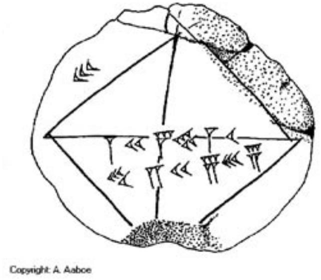
E temos:

$$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$$

Agora, se se quisesse uma aproximação melhor repetia-se o processo...

A obtenção da raiz quadrada de um número é um problema complexo. Sabe-se que a raiz de um número inteiro é outro número inteiro (por exemplo, $\sqrt{9} = 3$, ou, então, é um número que não pode ser representado por uma dízima finita (por exemplo, $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$) .

Sabe-se que a diagonal de um quadrado de lado unitário mede $\sqrt{2}$, pelo velhinho Teorema de Pitágoras). Uma tabuinha babilónica apresenta uma aproximação deste valor verdadeiramente surpreendente.



YBC 7289[1], com o valor 1;24,51,10 para $\sqrt{2}$

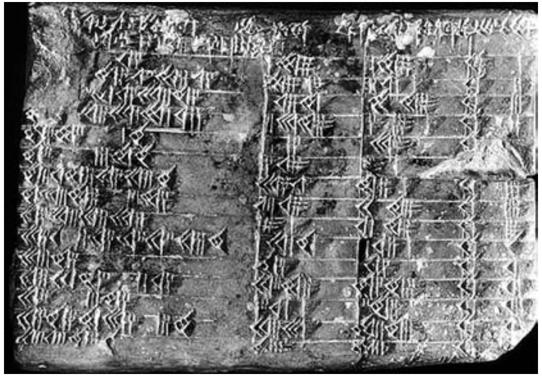
[1] As tabuinhas de barro são referenciadas pelo nome da colecção e número de série. Neste caso, trata-se de Yale Babylonian Colection 7289

Note-se que:

$$1;24{,}51{,}10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

Em notação decimal apresenta quatro casas correctas!

Triplos pitagóricos são conjuntos de três números inteiros a, b e c, tais que $a^2+b^2=c^2$, por outras palavras, a, b e c podem ser as medidas dos lados de um triângulo rectângulo. Destes triplos também se ocuparam os babilónios. Uma tabuinha de barro, agora célebre, exibe uma tabela destes triplos.



Plimpton 322

Vejamos agora como os babilónios resolviam equações. Nos registos de problemas, sem dúvida destinados ao ensino, surgem muitos problemas do seguinte tipo (de *VAT 8389*, do Museu de Berlim):

Um de dois campos produz $\frac{2}{3}$ sila *(unidade de volume) por* sar *(unidade de área); o segundo* $\frac{1}{2}$ sila *por* sar. *O primeiro campo produziu mais 500* sila *que o segundo; a soma das respectivas áreas é 1800* sar. *Qual é a área de cada campo?*

Hoje, escreveríamos imediatamente qualquer coisa como: se x é a medida do primeiro campo e y a do segundo, o problema traduz-se por:

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

$$x + y = 1800$$

Um método de resolução aconselha a obter uma incógnita em função da outra (por exemplo, da segunda equação obter, $x = 1800 - y$), introduzir este valor na primeira, que assim se transforma numa equação de uma só incógnita

$$\frac{2}{3}(1800 - y) - \frac{1}{2}y = 500$$

Que, após ser resolvida nos dá o valor de y. Com esse valor introduzido na segunda equação o valor de x deduz-se de imediato.

Contudo, o método babilónico era diverso. Da segunda equação, o escriba conclui que as medidas andam à volta de 900, uma será maior, outra menor. Assim, tenta o valor, que sabe ser falso, $x = y = 900$ na primeira equação. Obtém:

$$\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 = 150$$

A diferença entre o valor pretendido, 500, e o obtido, 150, é 350. Analizando os números que ocorrem na primeira equação, o escriba conclui que sempre que somar uma unidade a x, e consistentemente retirar uma unidade a y, aumenta o valor da expressão em $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$. Para saber quantas unidades deve somar a x (e subtrair a y) basta então resolver a equação $\frac{7}{6}z = 350$, o que é um problema mais simples do que o proposto. A resposta é z=300. Assim, a solução correcta para o primeiro problema é x=900+300=1200, y=900-300=600.

Curiosamente, as equações do primeiro grau, também ditas lineares, ocorrem como no exemplo anterior, integradas em problemas de sistemas de duas equações, isto é, problemas onde há duas incógnitas e são dadas duas condições. Raramente aparecem problemas focados em equações lineares. Um exemplo ocorre em *YBC 4652*:

Encontrei uma pedra, mas não a pesei; após lhe ter juntado um sétimo e um onze-avos desse total, pesava 1 mina *(unidade de peso). Quanto pesava a pedra original?*

Este problema poderia ser equacionado assim:

$$x + \frac{x}{7} + \frac{1}{11}\left(x + \frac{x}{7}\right) = 60$$

Na tabuinha, o escriba limita-se a dar a solução (em notação decimal, $x = 48{,}125$).

Na resolução de equações do segundo grau, que são aquelas onde ocorre o quadrado da incógnita (vulgarmente, x^2), os babilónios utilizaram técnicas de manipulação de áreas muito eficientes e que se traduzem muitas vezes na fórmula resolvente que ainda usamos. Esta tradição esteve na base de trabalhos matemáticos mais dedutivos, nomeadamente na Grécia, a chamada álgebra geométrica.

Estes problemas eram muitas vezes artificiais, claramente inventados. Muitos incluem somas de áreas com comprimentos, que não tem qualquer significado físico.

Um exemplo retirado de *BM 13901* (do Museu Britânico):

Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado e obtive 0;45. Qual é o lado?

O escriba dá um procedimento passo a passo, sem justificações. Como o número 0;45 não desempenha nenhum papel relevante, vamos usar uma letra, c, para podermos mais facilmente generalizar o método.

Temos então de resolver a equação

$$x^2 + x = c$$

Vamos descrever por símbolos modernos o que o escriba escreveu.

Sucessivamente, obtém:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

O desenvolvimento do quadrado da soma de duas quantidades era-lhes bem conhecido. Hoje, chama-se-lhe um dos casos notáveis da multiplicação e costuma escrever-se $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

O passo seguinte corresponde a identificar uma expressão deste género no lado esquerdo:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Aplica a raiz quadrada a ambos os membros (lembrar que ainda não há números negativos!):

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

E está concluído:

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

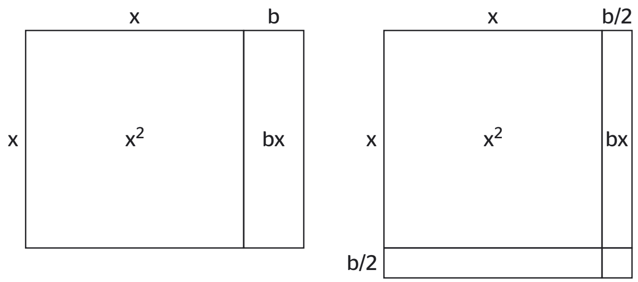
Este exemplo, que aparece em vários registos com valores numéricos variados, corresponde à resolução da equação do tipo:

$$x^2 + bx = c$$

onde b e c são números positivos. O procedimento babilónico é essencialmente equivalente à aplicação da fórmula:

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

Este método tem uma interpretação geométrica que o torna mais facilmente compreensível:



Interpretação geométrica da fórmula resolvente para a equação

$$x^2 + bx = c$$

Se tivermos um rectângulo de lados x e $x+b$, a sua área é x^2+bx. Se cortarmos o rectângulo menor de lados x e b em dois rectângulos iguais e os dispusermos como indicado na figura, vemos que basta somar um quadrado de lado $b/2$ para completar o quadrado...

Hoje, dada uma equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que a, b e c são números quaisquer e a é diferente de zero, temos uma fórmula geral que a resolve:

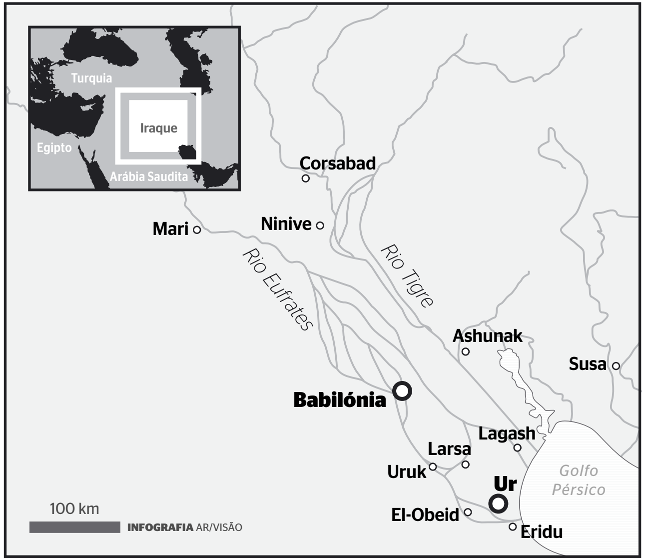
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contudo, como não havia números negativos na Babilónia, e todas as quantidades se podiam interpretar como áreas, cada tipo de equação carecia de tratamento diferente.

O Jogo Real de Ur

Em 1922, Leonard Woolley iniciou escavações em Ur, no Sul do Iraque actual. A cidade de Ur é referida na Bíblia como a terra de Abraão e o local do Éden. Durante vários anos Woolley e a sua equipa escavaram nas próximidades de uma zigurate (pirâmide em escada), descobrindo, em 1927, vestígios preciosos provenientes de sepulturas, sem dúvida de pessoas importantes.

Sir Woolley, nas escavações, com o seu encarregado



Ur, na Mesopotâmia

Entre esses objectos estavam um colar e um amuleto de ouro.

Tesouros desenterrados em Ur, em 1926

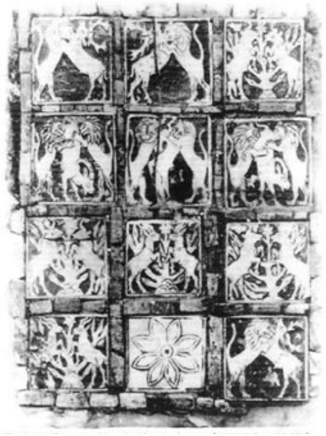
Woolley trabalhou consistentemente em Ur durante vários anos. A sua equipa encontrou diversos *Túmulos Reais* com muitos objectos fascinantes. Ao todo, Woolley explorou mais de 1500 túmulos, sendo 17 *Reais*. A maioria está datada de aproximadamente 2600 a.C.

Junto com os adornos preciosos, Woolley descobriu vários tabuleiros de um jogo, a que passou a chamar *O Jogo Real de Ur*, dado ter emergido de uma sepultura rica, na cidade da Mesopotâmia.

Sir Woolley e a sua equipa

Um dos exemplares de *O Jogo Real de Ur*, encontrados por Sir Woolley entre 1926 e 1930, hoje no Museu Britânico

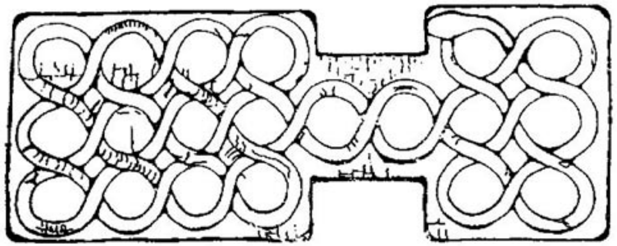
Não suscita dúvida de que a imagem retrata um jogo. Também parece natural concluir que se trata de um jogo para dois jogadores, que cada um dispõe de sete peças e que se utilizam três dados (em forma de pirâmide triangular!). Contudo, temos de encarar a pergunta difícil: como se jogava? A resposta não é fácil. A marcação das casas não era homogénea em todos os tabuleiros encontrados. Nem sequer os enfeites se dispunham simetricamente, como nos tabuleiros das duas figuras seguintes:



Tabuleiro incompleto encontrado por Wolley

Tabuleiro de prata encontrado por Woolley em Ur

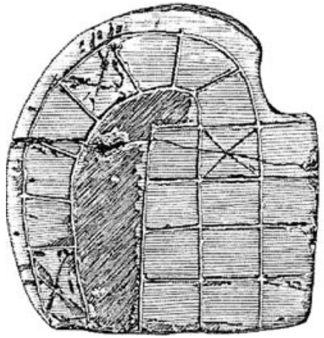
Há casas ilustradas com cenas de confronto, outras com cenários mais calmos. Pode ser que isso queira dizer algo quanto à forma de jogar... Induz-nos a supor que se trata de um jogo em que os adversários percorrem o tabuleiro lidando com as sortes que as diferentes casas lhes dão. Presumivelmente, o primeiro a completar todo o circuito com as suas peças seria o vencedor. Mas qual circuito? Por onde se começa? Onde se acaba? Uma sugestão sobre o caminho a percorrer pode ser fornecida por um outro tabuleiro que usa uma serpente para definir as casas. Talvez a cabeça indique o começo...



Tabuleiro de madeira, com uma cobra em relevo, encontrado no Irão (2400 a.C.)

O Jogo das Vinte Casas, como também era conhecido, era um mistério para os especialistas...

Como sucede muitas vezes, nos seus primórdios, os jogos confundiam-se com objectos divinatórios. O nosso jogo não é excepção. Ele apresenta um grupo de dozes casas (à esquerda nas nossas ilustrações) que, no verso, continham os doze signos do zodíaco. Além disso, neste terceiro milénio a.C. era utilizada na Mesopotâmia uma técnica divinatória a partir de fígados de animais. Ora apareceram instâncias de *O Jogo Real de Ur* em forma de fígados, como na figura seguinte:



O Jogo das Vinte Casas **numa tabuinha de barro em forma de um fígado de ovelha**

No final do século XIX, uma tabuinha de barro do século II a.C., com escrita cuneiforme, foi comprada, como muitas outras, pelo Museu Britânico, sendo-lhe dada a referência *BM 33333B*. O seu conteúdo foi mal interpretado e não suscitou interesse particular.

As duas faces da tabuinha *BM 33333B*

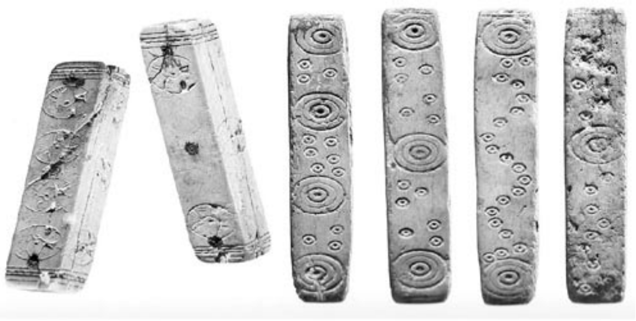
Contudo, o aparecimento de uma outra tabuinha com conteúdo semelhante e o trabalho de vários especialistas em escrita cuneiforme, principalmente de Irving Finkel, do Museu Britânico, permitiu concluir que os conteúdos focavam as regras de duas versões de *O Jogo Real de Ur*, bem como a utilização dos tabuleiros em actividades divinatórias.

Os tabuleiros encontrados por Woolley, do terceiro milénio a.C., apresentam a configuração de dois grupos de casas, um de 12 e outro de 6, unidos por uma ponte de duas casas.

Os dados são tetraédricos (têm quatro faces triangulares)

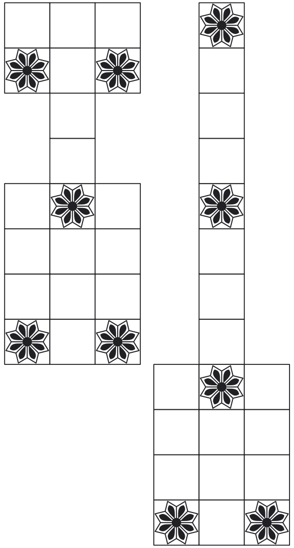
Um tetraedro regular (quatro faces triangulares iguais) apresentando dois dos vértices marcados. Como ao lançar um destes dados ele vai apresentar um vértice para cima, este pode ser ou não marcado com igual probabilidade. O lançamento de três dados destes permite obter 0, 1, 2 ou 3 vértices marcados.

Mais tarde, estes dados caíram em desuso e surgiram os dados de forma alongada, com quatro faces laterais marcadas de forma diferente:



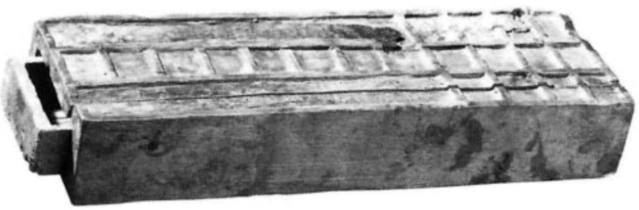
Dados alongados, com quatro faces laterais

O grupo de seis casas também se transformou, aparecendo como continuação da ponte:



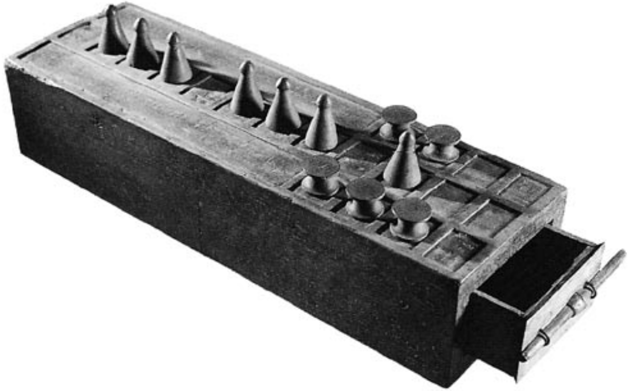
A evolução do tabuleiro de *O Jogo Real de Ur*

Algumas das rosetas que marcam casas especiais destes tabuleiros também desaparecem com o tempo, como as dos cantos. Nos segundo e primeiro milénio a.C., o aspecto do jogo era o ilustrado abaixo:



***O Jogo das Vinte Casas,* Egipto 1500 a.C.**

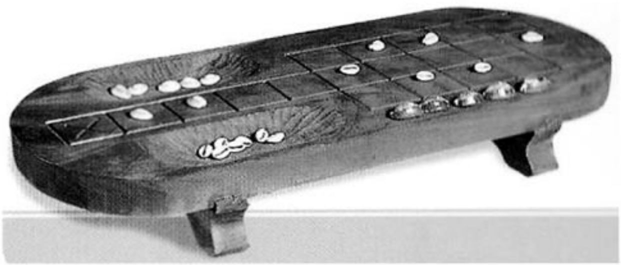
Este jogo espalhou-se pelas regiões vizinhas, tendo sido descobertos exemplares no Irão, em Israel, no Egipto, em Creta, etc. Algumas implementações eram verdadeiramente luxuosas...



***O Jogo das Vinte Casas,* Egipto 1250 a.C.**

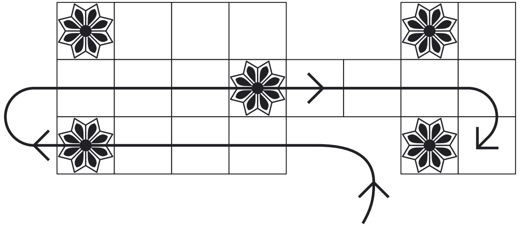
Tabuleiro duplo *(Senet e Ur)* encontrado no túmulo do faraó Tutankhamon, que morreu em 1352 a.C.

Um jogo muito semelhante a este foi descoberto recentemente na Índia, onde ainda se pratica, chamado *Asha*. Os especialistas analisaram as respectivas regras e não têm dúvida de que se trata de um descendente de *O Jogo Real de Ur*, que, assim, é talvez o mais velho jogo existente hoje no mundo.



Réplica do *Asha*, construída por R.C. Bell

Vejamos as regras propostas por Finkel:



O percurso das brancas

A ilustração mostra o trajecto das peças brancas. O das negras é semelhante, mas usa a fila superior e a média, em vez da inferior e a média. Só há interacção na fila intermédia, que ambos os jogadores devem atravessar.

Os três dados tetraédricos, quando lançados, lêem-se segundo a tabela seguinte, de acordo com o número de marcas viradas para cima:

	1	2	3	4
0 marcas				x
1 marca	x			
2 marcas		x		
3 marcas			x	

As regras propostas são as seguintes:

1. *Os jogadores lançam os dados, começando o que tiver maior pontuação.*

2. *As peças entram por lados opostos do tabuleiro e deslocam-se de acordo com a figura acima.*

3. *Cada jogador tem, na sua vez e após lançar os dados, de jogar. Não o podendo fazer passa a vez ao adversário.*

4. *Pode introduzir-se peças novas no tabuleiro em qualquer jogada.*

5. *Um jogador pode ter duas peças na mesma casa e movimentá-las em conjunto.*

6. *Uma peça que se encontre isolada na fila central é expulsa se uma peça adversária cair na mesma casa.*

7. *Se um jogador atingir uma roseta (uma das casas marcadas) tem direito a jogar de novo (não tem de mover a mesma peça).*

8. *Peças que se encontrem em casas com rosetas não podem ser expulsas.*

9. *As peças expulsas têm de recomeçar o seu trajecto do início.*

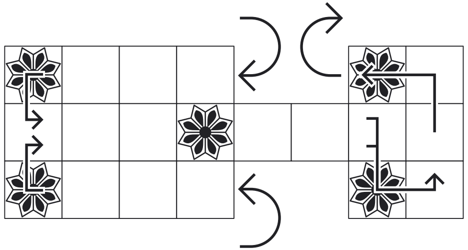
10. *Para abandonar o tabuleiro é necessário que a pontuação dos dados seja exacta.*

11. *Ganha quem retirar todas as suas sete peças do tabuleiro.*

Uma variante habitual consiste em não permitir acumulação de peças em cada casa, substituindo a regra **5.** por

5a. *Cada casa só pode conter uma peça.*

O trajecto também pode ser modificado. O da figura abaixo tem a vantagem de dispor as rosetas de quatro em quatro casas:



Só as primeiras quatro casas não são partilhadas

Com base na segunda tabuinha de barro, Irving Finkel propôs um conjunto de regras para um jogo mais elaborado, que passamos a descrever.

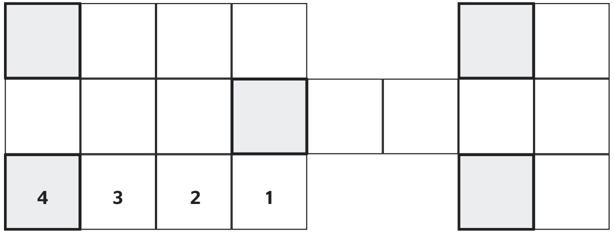
O trajecto seria o mesmo que descrevemos acima, isto é, o ilustrado:

O trajecto habitual para um jogo mais elaborado

Para equipamento, para além do tabuleiro, é necessário que cada jogador disponha de cinco peças com marcações diferentes (por exemplo, discos numerados de 1 a 5). Originalmente, tratava-se de cinco nomes de pássaros. São necessárias ainda 5 fichas para cada um (podem ser fichas de *poker*) e, ainda, 50 fichas para o *monte*. Nesta variante, usam-se quatro dados tetraédricos (podem lançar-se três dados e repetir-se o lançamento de um deles, registando os quatro resultados). A pontuação é dada pela tabela:

	1	2	3	4	5
0 marcas					x
1 marca	x				
2 marcas		x			
3 marcas			x		
4 marcas				x	

1. *Os jogadores lançam os dados, começando o que tiver maior pontuação.*
2. *As quatro casas assinaladas devem estar ocupadas com as peças correspondentes antes de poder começar a mover qualquer peça no tabuleiro. A peça com o número 1 só pode entrar na casa com o número 1, etc.*



O posicionamento destas peças tem de ser feito num lance só. Isto significa que o jogador tem de tirar 3 para colocar a peça 3 na casa 3, não pode desdobrar em mais do que um movimento. Se, ao jogar, lhe sair uma pontuação que corresponde a uma casa já ocupada e não puder jogar, passa a vez ao adversário.

3. *A peça 5 tem liberdade especial. Para entrar no tabuleiro é preciso tirar 5 nos dados, mas pode entrar em qualquer uma das casas numeradas de 1 a 4 (quando estas quatro casas estiverem ocupadas, as peças passam a poder mover-se). Se, no começo do jogo, um jogador não puder introduzir uma peça, por no seu lugar estar a peça 5, perde a vez. Tem de esperar que a casa esteja livre e lhe saia a pontuação correcta para a introduzir.*

4. *Quando as quatro primeiras casas estiverem correctamente ocupadas (uma das peças pode ser a 5), o jogador pode começar a mover as peças no tabuleiro. Após lançar os dados, o jogador pode escolher a peça que quiser para movimentar (quando sai 3, por exemplo, não é obrigado a jogar a peça 3). Contudo, as peças que são expulsas só podem reentrar com os lançamentos correctos (ver regra 2.).*

5. *Quando um jogador atinge uma roseta (por introduzir a peça 4, ou a peça 5 no mesmo local, ou, ainda, em qualquer outra altura do jogo) retira do* monte *uma quantia determinada pela peça com que o fez (uma ficha se for a peça 1, duas se for a peça 2, etc.). Sempre que se atingir uma roseta ganha-se uma jogada extra, como na versão anterior. Se acontecer o* monte *estar vazio, o jogo continua (em breve terá fichas, fruto das penalidades...).*

6. *Se um jogador passar sobre uma roseta sem a ocupar, tem de pagar uma penalidade correspondente à peça com que o fez (uma ficha se for a peça 1, duas se for a peça 2, etc.). A penalidade é paga ao adversário se este ocupar a roseta em questão, caso contrário é paga ao* monte. *Se o jogador penalizado não tiver fichas suficientes para pagar, a peça em questão é expulsa e tem de reentrar do início, com lançamento correcto de pontos.*

7. *As regras 2., 3., 4., 5. e 6. da variante anterior valem também nesta versão.*

8. *Quando um jogador retira todas as suas peças do tabuleiro, recebe cinco fichas do* monte *(se não houver que chegue, o adversário tem de as fornecer). O adversário soma os números das suas peças que não terminaram o percurso e paga montante igual em fichas ao vencedor (o* monte *fornece fichas se o perdedor não conseguir pagar esta penalidade). Vence o jogador que tiver mais fichas.*

Para tornar a competição mais interessante podem jogar-se três jogos seguidos (no começo de cada jogo, os jogadores têm cinco fichas cada um).