TRIÂNGULOS

E

QUADRILÁTEROS

Materiais de apoio ao professor,

com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano

João Pedro Ponte

Paulo Oliveira

Nuno Candeias

Julho 2009

Agradecemos vivamente a todos os professores que experimentaram as tarefas contidas neste documento e a todas as pessoas que nos deram sugestões tendo em vista o seu aperfeiçoamento, bem como o das orientações para o professor. Esperamos que este conjunto de materiais possa ser útil para todos aqueles que procuram pôr em prática as orientações do *Programa de Matemática do Ensino Básico*.

Índice

Introdução

Este conjunto de materiais de apoio constitui uma sugestão de organização do ensino-aprendizagem proporcionada ao professor para o tópico Triângulos e quadriláteros, constante no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (3.º ciclo). Naturalmente, muitas abordagens são possíveis, mas entendeu-se útil apresentar aqui uma estratégia compatível com as indicações do programa.

Esta introdução recorda os objectivos gerais de aprendizagem no que se refere à Geometria e às capacidades transversais do programa para o 3.º ciclo, sumaria brevemente as ideias matemáticas e didácticas fundamentais dos tópicos de Geometria relevantes para o 7.º ano de escolaridade, apresenta um conjunto de sugestões didácticas gerais para esta unidade e descreve a estrutura destes materiais de apoio. Apresenta, ainda, uma proposta de planificação para a unidade em causa.

Segue-se um conjunto de tarefas que poderão ser fotocopiadas e distribuídas aos alunos, acompanhadas das respectivas sugestões de exploração específicas para o professor, bem como de exemplos de trabalho feito por alunos.

Objectivos gerais de aprendizagem

No 3.º ciclo do ensino básico são estudadas diversas propriedades dos triângulos e quadriláteros, o que constitui uma boa oportunidade para os alunos realizarem alguma actividade de exploração e investigação e desenvolverem a sua capacidade de raciocinar indutiva e dedutivamente.

O trabalho neste tópico é fundamental para que possam ser atingidos os objectivos gerais de aprendizagem previstos para a Geometria no 3.º ciclo, com especial relevo para os seguintes:

- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar;
- Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- Compreender e ser capaz de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos;
- Compreender a noção de demonstração e ser capaz de fazer raciocínios dedutivos.

Além disso, o trabalho neste tópico deve contribuir para o desenvolvimento das capacidades transversais previstas para este ciclo, nomeadamente

- Resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;
- Raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas;
- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Triângulos e quadriláteros

Os alunos já trabalharam com figuras geométricas simples nos 1.º e 2.º ciclos. Retoma-se agora esse estudo, tendo em vista conhecer as propriedades relativas à soma dos ângulos internos e externos de um triângulo, compreender e usar os critérios de congruência de triângulos e classificar quadriláteros, construí-los a partir de condições dadas e investigar as suas propriedades, com especial atenção ao paralelogramo.

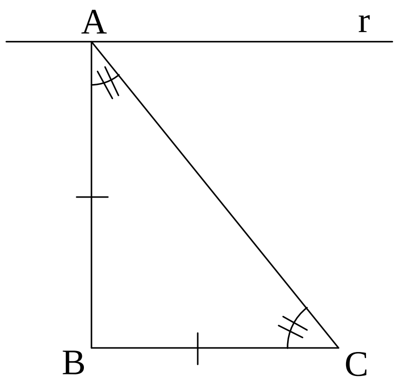
Ideias matemáticas importantes a ter em atenção no trabalho com triângulos e quadriláteros incluem, por exemplo:

- Existe uma correspondência entre a informação de que necessitamos de conhecer para *construir um triângulo* e os *critérios de congruência de triângulos*;
- Uma figura geométrica, em particular um triângulo ou um quadrilátero, tem *propriedades* envolvendo os seus elementos (lados, ângulos internos, ângulos externos), diagonais, soma de ângulos internos, soma de ângulos externos, área e perímetro, etc., que é interessante analisar;
- A *congruência* (de segmentos, ângulos e triângulos) é um conceito fundamental que nos permite resolver problemas e demonstrar propriedades geométricas;
- Um *axioma* é uma afirmação matemática que tomamos como ponto de partida para demonstrar outras afirmações;
- Uma afirmação matemática que ainda não foi demonstrada é uma *conjectur*a que pode ser verdadeira ou falsa. Para termos a certeza que se trata de uma afirmação verdadeira (*teorema* ou *propriedade*), temos de a demonstrar.

Notação e simbologia

Neste documento usa-se uma notação simplificada para representar segmentos de recta e seus comprimentos, assim como amplitudes de ângulos e suas medidas. Afirmar que os segmentos de recta AB e CD são congruentes (simbolicamente, $AB \equiv CD$) é equivalente a afirmar que os comprimentos destes segmentos são iguais. Por isso, pode usar-se a mesma simbologia (simplesmente AB) para representar um segmento de recta e o seu comprimento. Analogamente, afirmar que os ângulos ABC e A'B'C' são congruentes (simbolicamente, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$) é equivalente a afirmar que as medidas das suas amplitudes são iguais. Por isso, pode usar-se a mesma simbologia (simplesmente $\angle ABC$) para amplitudes de ângulos e suas medidas (ver Coxeter, 1989, p. 264). A medida da amplitude do ângulo ABC é adiante representada pelo símbolo $\angle ABC$.

Para representar a congruência de segmentos de recta e de ângulos nas figuras geométricas de apoio usa-se a simbologia de traços ilustrada na figura[1]. Assim, a congruência dos segmentos AB e BC representa-se por um traço que corta cada um destes segmentos. De modo semelhante, a congruência dos ângulos BAC e ACB é aqui representada por dois traços.



Os triângulos e os quadriláteros são representados pelos seus vértices. Por exemplo, o triângulo da figura representa-se por ABC. Analogamente, um quadrilátero com vértices consecutivos A, B, C e D é representado por ABCD. O símbolo $ABC \equiv A'B'C'$ representa a congruência dos triângulos ABC e A'B'C'.

Sugestões didácticas

O trabalho no tópico Triângulos e quadriláteros deve revestir-se de um cunho exploratório e investigativo. Por isso, em muitas destas aulas os alunos trabalham em tarefas que lhes são propostas e que não são apenas exercícios em que têm que aplicar conhecimentos previamente aprendidos. Pelo contrário, trata-se de tarefas em que os alunos têm de formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capaci-

[1] Nestes materiais, incluindo as tarefas propostas, todas as figuras que surgem são figuras geométricas. Com este entendimento, por simplicidade, usa-se, muitas vezes, apenas o termo "figura".

dades anteriormente desenvolvidas. O trabalho nestas tarefas constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos. Num ou noutro momento, no entanto, há também que propor a realização de exercícios, tendo em vista consolidar conhecimentos.

Cada uma das tarefas apresentadas – que inclui sempre diversas questões – foi pensada para ser realizada, em regra, num bloco. Essa realização inclui três momentos – apresentação, trabalho autónomo dos alunos, em grupo, em pares, ou individualmente – e discussão colectiva com toda a turma. Este sistema adapta-se muito bem ao tempo escolar de blocos de 90 minutos. Para que isso aconteça é necessário terminar o trabalho autónomo em tempo útil, de forma a dar tempo a uma discussão proveitosa no segundo momento da aula. Por isso, é importante que a aula tenha ritmo e que os alunos estejam sempre envolvidos na realização das tarefas. Por isso, é necessário que os alunos interiorizem que existe primeiro um tempo para trabalhar, previamente definido, havendo depois um tempo para discutir o trabalho feito por todos.

A primeira fase corresponde à apresentação da tarefa e deve ser curta e motivadora. O professor pode distribuir o enunciado escrito com a tarefa, mas deve igualmente referir oralmente alguns dos elementos mais salientes da situação. É muito importante que os alunos compreendam bem a tarefa que lhes é proposta e, por isso, se existirem termos que os alunos não conheçam na descrição da situação ou nas questões iniciais, estes devem ser desde logo analisados. O professor deve dar igualmente, nesta fase, indicações acerca do modo de trabalhar bem como do momento em que se iniciará a discussão colectiva.

De seguida, na segunda fase, os alunos trabalham autonomamente nas questões propostas. O professor deve circular pela sala, verificando se existem dificuldades na resolução das questões. Os alunos, com frequência, colocam dúvidas ou pedem a validação das suas conjecturas e resultados. O professor deve ter em atenção que se responder a todas as dúvidas dos alunos, está a resolver a tarefa em vez deles. Por isso, na maior parte dos casos, há que responder às perguntas dos alunos com outras perguntas, que os obriguem a pensar um pouco mais. No caso em que o professor se apercebe que um número significativo de alunos não consegue compreender a situação ou formular estratégias de resolução da tarefa, pode ser preferível interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar desde logo uma pequena discussão colectiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

Finalmente, na terceira fase, realiza-se a discussão final. Aqui os alunos são chamados a apresentar o seu trabalho. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Todos os alunos, de uma forma ou outra, devem ter possibilidade de participar, nomeadamente colocando questões e apresentando argumentos. No entanto, não é necessário que todos os alunos (ou todos os pares ou todos os grupos) apresentem o seu trabalho em todas as aulas, em especial nos casos em que isso pouco acrescenta ao que já foi anteriormente apresentado pelos colegas. Esta dinâmica de aula propicia a análise das situações matematicamente significativas e promove o desenvolvimento das capacidades de comunicar, raciocinar e argumentar. Noutras situações, os alunos que não tiverem oportunidade de mostrar o que fizeram, poderão ser os primeiros a mostrar o seu trabalho.

Deve ter-se em atenção que este momento de discussão é fundamental. É reflectindo sobre o trabalho feito – o seu e o dos colegas –, confrontando as suas ideias com as dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem. Por isso, é necessário valorizar este momento. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas, podem mesmo assim participar na discussão, quer das questões em que chegaram a resolver, quer das outras questões. No final da discussão, o professor, se possível solicitando a participação dos alunos, deve promover a sistematização das ideias fundamentais que foram aprendidas nesta aula.

Em muitos casos, os professores terão que adaptar as tarefas às características das suas turmas. Isso pode envolver eliminar uma ou outra questão, ajustando assim o que é proposto ao que espera do trabalho realizado individualmente, em pares ou em grupos pelos alunos (em 45-60 minutos), de modo a deixar um tempo adequado para a discussão (noutros 30-45 minutos). Por vezes, pode ser adequado dividir uma tarefa em duas partes, propondo aos alunos a realização de trabalho autónomo, seguida de um momento de discussão colectiva, depois de novo trabalho autónomo, e, finalmente, nova discussão.

Nalguns casos, a realização de uma tarefa pode requerer mais do que um bloco de 90 minutos. Isso pode acontecer, no início, porque os alunos não estão habituados a este tipo de trabalho. Pode também acontecer porque uma tarefa tem questões que envolvem dificuldades imprevistas para certos alunos ou porque contêm um elevado número de questões. O professor deve então decidir se é melhor eliminar uma parte das questões, reduzindo a tarefa, ou desdobrar a sua realização por um bloco e meio ou mesmo dois blocos.

Note-se que o sistema de deixar os alunos trabalhar autonomamente durante todo um bloco, deixando a discussão para o bloco seguinte, de um modo geral, é pouco eficiente, pois os alunos dificilmente têm presente, com a mesma vivacidade, o trabalho anteriormente feito. Deste modo, a discussão geral, que deveria ser uma parte fundamental do trabalho, acaba por ser muito menos rica e participada do que seria desejável. Nestes casos, é preferível fazer uma paragem no trabalho autónomo dos alunos a meio da tarefa e discutir com todos o trabalho já realizado. Depois, no bloco seguinte, os alunos prosseguirão o seu trabalho e terão oportunidade de fazer nova discussão colectiva, com uma sistematização final das ideias fundamentais.

A planificação proposta contém um conjunto de tarefas para usar na sala de aula recorrendo aos materiais usuais da Geometria – régua, compasso e transferidor. No entanto, em alguns casos, são propostas tarefas alternativas, a realizar num ambiente de geometria dinâmica (AGD). Recomenda-se a utilização destas tarefas alternativas, sempre que possível, uma vez que isso proporciona aos alunos uma experiência de aprendizagem significativamente enriquecida. Para o caso dos alunos ainda não estarem familiarizados com este tipo de ambiente, é proporcionado um conjunto de materiais de trabalho (Tarefas A e B), visando a exploração de um AGD no contexto da realização de tarefas de Geometria envolvendo conceitos já estudados em anos anteriores. Estes materiais têm de ser complementados pelo professor com uma indicação dos comandos e ferramentas específicas do AGD a utilizar.

Estrutura dos materiais de apoio

Em cada tarefa, para além da proposta de trabalho para os alunos, é dado um conjunto de indicações para o professor. Os *Conhecimentos prévios dos alunos* apresentam os conhecimentos e capacidades que os alunos devem possuir para poderem trabalhar na tarefa indicada. No caso de os alunos não dominarem de modo satisfatório os conhecimentos prévios referidos, o professor deve rever com eles as ideias principais ou propor-lhes a realização de um trabalho preliminar apropriado.

Nas *Aprendizagens visadas* são indicados os principais objectivos de aprendizagem que se têm em vista com a realização da tarefa proposta. Estes objectivos correspondem a uma parte dos objectivos do tópico indicados no *Programa de Matemática* bem como das capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticos.

As *Orientações para o professor* contêm sugestões concretas sobre o modo de estruturar e conduzir a aula, chamando a atenção para alguns problemas que podem surgir. Para além das indicações gerais sobre a organização da aula, estas orientações contêm por vezes aspectos da exploração matemática da tarefa, com eventual indicação de alguns dos erros mais comuns dos alunos. As indicações suplementares contêm informações adicionais úteis para o professor e extensões da tarefa proposta ou mesmo questões adicionais para colocar ao aluno, se for caso disso.

Finalmente, as *Explorações de alunos*, quando aparecem, contêm exemplos de situações ocorridas ou susceptíveis de ocorrer na sala de aula, que ilustram a variedade de estratégias que eles podem usar na realização da tarefa[2]. Estas situações dão pistas ao professor sobre o modo de orientar o seu trabalho e ajudam a prepará-lo para lidar com a variedade de respostas dos seus alunos que pode encontrar.

As tabelas apresentadas adiante na proposta de planificação contêm as seguintes colunas:

- Blocos, com a respectiva numeração;
- Tópicos apresentados no programa, a que se destinam cada uma das tarefas;

[2] Todos os episódios reais de resolução por alunos apresentados neste documento foram recolhidos por Nuno Candeias, nas suas aulas.

- Objectivos específicos referentes a cada tarefa apresentados no programa;
- Notas, indicações apresentadas no programa sobre os tópicos a que se destinam as tarefas;
- Tarefas, com a designação de cada tarefa;
- Instrumento de trabalho pensado para cada tarefa, Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) ou Papel e Lápis (PL).

Referências

Coxeter, H. S. M. (1989). *Introduction to geometry*. New York, NY: Wiley.

King, J., & Schattschneider, D. (2003). In J. King & D. Schattschneider (Eds.). *Geometria dinâmica: Selecção de textos do livro Geometry turned on!* Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

Oliveira, A. F. (1995). *Geometria euclidiana*. Lisboa: Universidade Aberta.

Algumas das tarefas que a seguir se propõem foram inspiradas em, ou adaptadas de:

Bennett, D. (1996). *Exploring geometry*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Key Curriculum Press (1997). *Discovering geometry*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Key Curriculum Press (2008). *Tracing proof in Discovering geometry*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Lopes, A., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J., Viana, J., Bastos, R., & Graça, T. (1996). *Matemática 8*. Porto: Edições Contraponto.

Schacht, J., & McLennan, R. (1957). *Plane geometry*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.

Serra, M. (2008). *Discovering geometry*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Smith, R., & Ulrich, J. (1956). *Plane geometry*. New York, NY: Harcourt, Brace & World.

Proposta de planificação

Módulo inicial para AGD

Blocos	Subtópicos	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumento
1	- Figuras geométricas, perímetro e área (revisão).	- Conhecer e utilizar os elementos base dos AGD.	–	A. Elementos base da geometria dinâmica e construção de figuras	AGD
2	- Classificação de triângulos (revisão) e de trapézios.	- Construir figuras dinâmicas num AGD.		B. Construção de triângulos e trapézios	

Triângulos e quadriláteros

Blocos	Subtópicos	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumento
1	- Soma dos ângulos internos de um triângulo.	- Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com os ângulos internos e externos de um triângulo; - Deduzir o valor da soma dos ângulos internos e externos de um triângulo; - Identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo.	- Os alunos com melhor desempenho matemático podem deduzir a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados.	1. Ângulos internos de um triângulo	Papel e lápis/AGD
2	- Soma dos ângulos externos de um triângulo.	- Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com os ângulos internos e externos de um triângulo; - Deduzir o valor da soma dos ângulos internos e externos de um triângulo; - Identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo.	- Os alunos com melhor desempenho matemático podem generalizar a fórmula para a soma dos ângulos externos de um polígono de *n* lados.	2. Ângulos externos de um triângulo	Papel e lápis/AGD

3	- Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo. - Compreensão do problema - Concepção, aplicação e justificação de estratégias	- Identificar os dados, as condições e o objectivo do problema; - Compreender e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; - Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.	- Propor problemas com informação irrelevante - Considerar abordagens tais como: desdobrar um problema complexo em questões mais simples; explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspectivas de um problema; resolver o problema admitindo que se conhece uma solução.	3. Resolução de problemas em triângulos	Papel e lápis
4	- Congruência de triângulos.	- Compreender e aplicar os critérios de congruência de triângulos e usá-los na construção de triângulos; - Compreender o que é uma conjectura, um teorema, um exemplo e um contra-exemplo; - Exprimir processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios	- Usar os critérios ALA, LAL e LLL de congruência de triângulos.	4. Investigando congruências com régua, compasso e transferidor/Investigando congruências com o computador.	Papel e lápis/AGD
5				5. Usando critérios de congruência.	Papel e lápis
6			- Explicar porque não existe um critério LLA.	6. Elaborando demonstrações.	
7	- Propriedades, classificação e construção de quadriláteros. - Formulação, teste e demonstração de conjecturas.	- Determinar a soma dos ângulos internos de um quadrilátero; - Classificar quadriláteros, construí-los a partir de condições dadas e investigar as suas propriedades; - Compreender o papel das definições em matemática; - Representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas.	- Determinar a soma dos ângulos internos de um quadrilátero. - Salientar o quadrado como caso particular do losango. - Considerar as propriedades relativas aos lados, aos ângulos e às diagonais de um paralelogramo, por exemplo num ambiente de Geometria Dinâmica.	7. Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos.	Papel e lápis/AGD
8		- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticas por escrito, utilizando vocabulário próprio; - Classificar quadriláteros, construí-los a partir	- Criar oportunidades para apresentações em grupo; - Usar as TIC em actividades de exploração e investigação;	8. Investigando quadriláteros e pontos médios.	AGD

		de condições dadas e investigar as suas propriedades;	- Salientar o quadrado como caso particular do losango. - Considerar as propriedades relativas aos lados, aos ângulos e às diagonais de um paralelogramo.		
9	- Propriedades, classificação e construção de quadriláteros. - Formulação, teste e demonstração de conjecturas.	- Compreender e usar a fórmula da área de um paralelogramo e investigar as suas propriedades; - Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com as propriedades do paralelogramo; - Identificar e utilizar o raciocínio indutivo e dedutivo.	- Usar os critérios congruência de triângulos; - Considerar as propriedades relativas aos lados, aos ângulos e às diagonais de um paralelogramo.	9. Propriedades do paralelogramo	Papel e lápis
10	- Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo; - Congruência de triângulos; - Propriedades, classificação e construção de quadriláteros; - Formulação, teste e demonstração de conjecturas; - Compreensão do problema, concepção, aplicação e justificação de estratégias na sua resolução.	- Compreender critérios de congruência de triângulos; - Utilizar critérios de congruência de triângulos e propriedades de quadriláteros na resolução de problemas e na justificação de propriedades de figuras; - Seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração.		10. Problemas com triângulos e quadriláteros.	

Tarefas A e B – Módulo Inicial para AGD

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) permitem que os objectos geométricos estáticos ganhem uma nova "vida" e dinamismo. Este tipo de software permite construir objectos básicos da geometria euclidiana (pontos, rectas, segmentos de recta e circunferências) e, a partir deles, novos objectos satisfazendo certas relações. Ao rigor das construções acrescenta-se a possibilidade dada ao utilizador de transformar as figuras, arrastando um ou mais dos elementos que estão na base da sua construção, observando as propriedades que permanecem inalteradas e as que deixam de se verificar. Além disso, os ambientes de geometria dinâmica permitem medir comprimentos, ângulos, perímetros e áreas e efectuar cálculos com essas medidas.

Estas características permitem aos alunos explorar e descobrir mais facilmente relações entre figuras, procurar invariantes e resolver problemas geométricos. Ao investigar, os alunos formulam conjecturas e argumentam sobre a sua veracidade ou falsidade. Como referem King e Schattschneider (2003), a "evidência experimental que [o AGD] fornece provoca uma convicção forte que pode motivar o desejo de uma demonstração" (p. 11). Por isso, não é de estranhar que estes programas, acompanhados de tarefas matemáticas significativas, nomeadamente de exploração e investigação, possam ter um papel importante na abordagem dos tópicos de Geometria indicados no *Programa de Matemática* articulados com as capacidades transversais também aí apresentadas.

Levar os alunos a contactar com um AGD é, também, dar-lhes a possibilidade de passarem por uma experiência de aprendizagem matematicamente significativa. No tema Triângulos e quadriláteros, algumas das tarefas foram pensadas para que os alunos utilizem um AGD. As construções dos triângulos e quadriláteros propostas nessas tarefas dependem apenas das suas propriedades. Logo, as propriedades dessas figuras mantêm-se durante o arrastamento de algum dos seus elementos base (por exemplo, a perpendicularidade ou o paralelismo). Quando os alunos notam novas propriedades invariantes podem procurar demonstrá-las e essa demonstração, em muitos casos, contribui para uma melhor compreensão das propriedades. Por isso, este ambiente de trabalho suscita o raciocínio geométrico, sem o substituir.

Durante a última década, têm melhorado as condições materiais nas escolas portuguesas, nomeadamente a acessibilidade a computadores e software actualizados. As salas equipadas com computadores ou os computadores portáteis são recursos que devem ser utilizados no ensino-aprendizagem da Geometria no 3.º ciclo. Muitas escolas já investiram na aquisição de software de geometria dinâmica. Porém, nestes últimos anos, têm surgido programas de utilização livre bastante poderosos que podem ser usados no estudo da Geometria por professores e alunos, tanto na escola como em casa.

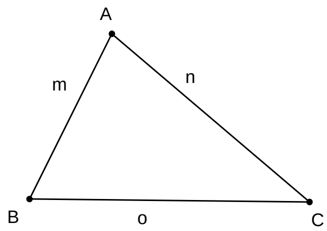
Com este módulo inicial pretende-se que os alunos tomem contacto com as características do software proposto pelo professor, constituindo um ponto de partida para o estudo de figuras, nomeadamente triângulos e quadriláteros. Este módulo é constituído por duas tarefas em que se faz referência a diversos conceitos geométricos já estudados em anos anteriores, nomeadamente, ângulo, rotação, reflexão, perímetro e área. Na tarefa B, os alunos têm que construir triângulos e, partindo destes, construir trapézios. Nesta tarefa os alunos têm ainda a possibilidade de relembrar as classificações de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Os materiais aqui apresentados têm de ser complementados pelo professor com a indicação dos comandos e ferramentas específicas do AGD a utilizar. De modo a ultrapassarem mais facilmente os obstáculos que inevitavelmente surgem neste trabalho inicial, uma situação favorável é colocar dois alunos em cada computador, recomendando que discutam entre si a resolução de todas as tarefas. Como todos os alunos devem passar pela experiência de construir figuras e investigar directamente as suas propriedades, o professor deve recomendar fortemente a alternância entre o aluno que utiliza o rato e o que utiliza o teclado.

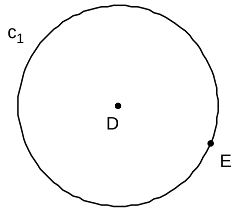
Tarefa A – Elementos base da geometria dinâmica e construção de figuras

Um ambiente de geometria dinâmica permite desenhar e construir figuras usando como elementos base pontos, segmentos de recta e circunferências.

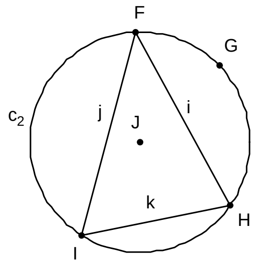
1. Constrói as seguintes figuras:



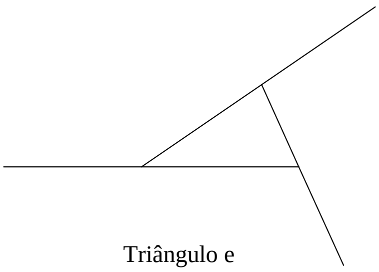
Triângulo



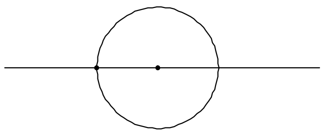
Circunferência



Triângulo sobre
a circunferência



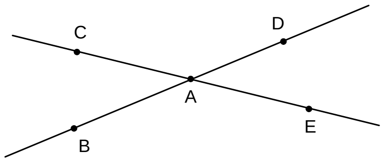
Triângulo e
semi-rectas



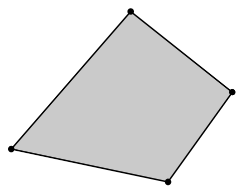
Circunferência e recta
contendo o diâmetro

2. Constrói um segmento de recta e um ponto C exterior a esse segmento. Constrói uma recta paralela e uma recta perpendicular ao segmento inicial e que passem no ponto C.

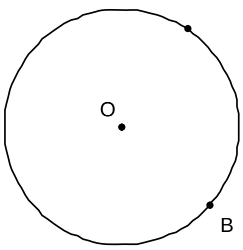
3. Constrói duas rectas que se intersectem num ponto A (ver figura). Mede as amplitudes dos ângulos BAC, CAD, DAE e BAE. Há alguma relação entre esses ângulos? Se sim, qual?



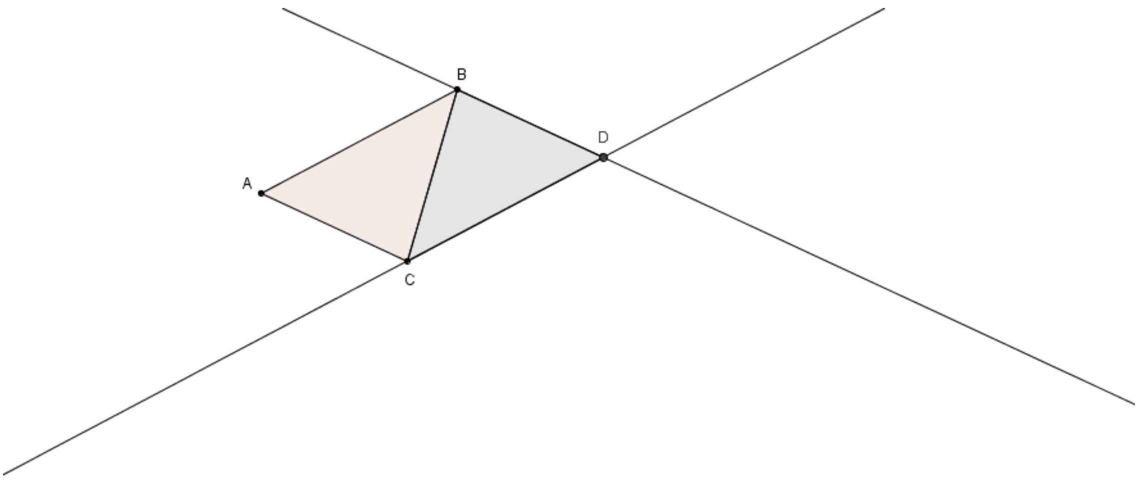
4. Constrói um quadrilátero como o da figura seguinte. Usando os menus, apresenta no ecrã as medidas das amplitudes dos seus ângulos internos, perímetro e área. Arrasta um dos vértices e verifica o que acontece a todas essas medidas.



5. Constrói uma circunferência e um ponto, B, sobre ela. Com centro em O, centro da circunferência, faz rotações sucessivas de 90º do ponto B. Une os pontos que obtiveste sobre a circunferência. Que figura se obtém? Mede os seus lados e ângulos para testar a tua conjectura.



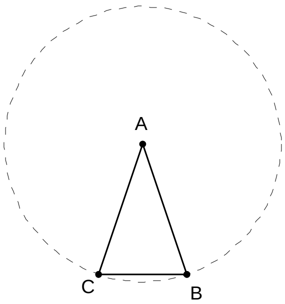
6. Constrói um triângulo ABC e as rectas CD e BD paralelas a AB e AC respectivamente, como na figura. Mede os ângulos ABD, BDC, DCA, CAB. Que relações existem entre eles?



Tarefa B – Construção de triângulos e trapézios

O ambiente de geometria dinâmica permite fazer construções de figuras geométricas que, quando arrastadas, mantêm a sua forma. Assim, para uma dada questão, é possível analisar um grande número de casos e investigar relações e propriedades.

1. Constrói uma circunferência de centro A e um ponto B sobre ela. Depois, constrói os lados do triângulo ABC como mostra a figura. Mede os lados e os ângulos internos do triângulo.

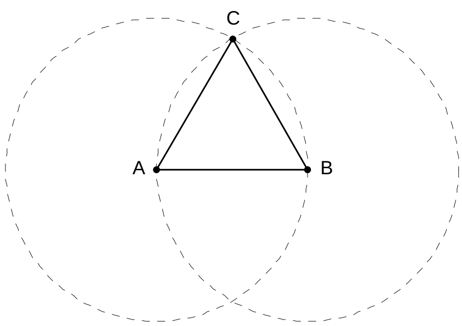


1.1. Como classificas este triângulo?

1.2. Sem medir os lados, conseguirias dizer alguma coisa sobre a relação entre eles? Justifica.

1.2. Há alguma relação entre os ângulos? Se sim, qual?

2. Constrói um segmento AB e duas circunferências como mostra a figura. C é um dos pontos onde as circunferências se intersectam. Mede os lados e os ângulos internos do triângulo.



2.1. Como classificas este triângulo?

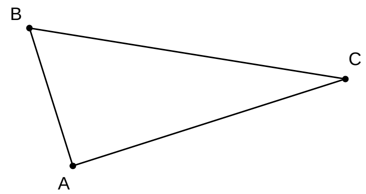
2.2.. Sem medir os lados, conseguirias dizer alguma coisa sobre a relação entre eles? Justifica.

2.3. Há alguma relação entre os ângulos? Se sim, qual?

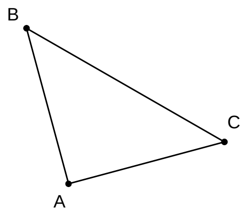
3. Também é possível classificar os triângulos tendo em conta os seus ângulos.

Triângulo **acutângulo**:	Um triângulo que tenha todos os ângulos agudos (< **90º**)
Triângulo **rectângulo**:	Um triângulo que tenha um ângulo recto (**= 90º**)
Triângulo **obtusângulo**:	Um triângulo que tenha um ângulo obtuso (**> 90º e < 180º**)

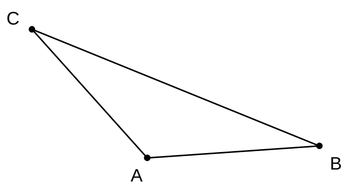
3.1. Constrói um triângulo rectângulo que se mantenha como triângulo rectângulo quando os seus vértices são arrastados. Descreve como procedeste.



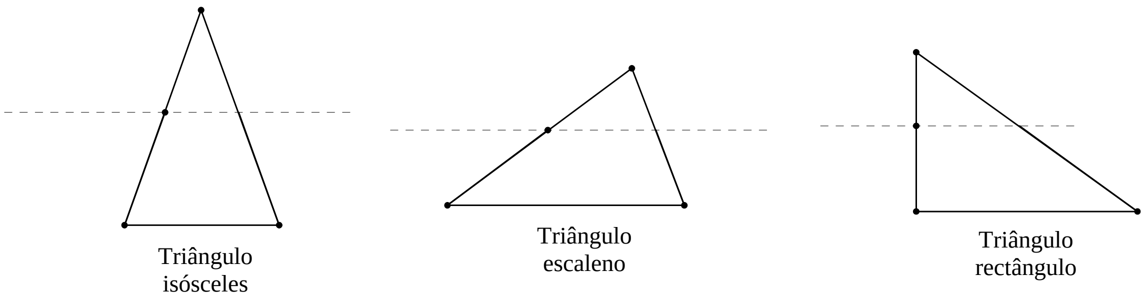
3.2. Constrói um triângulo rectângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.



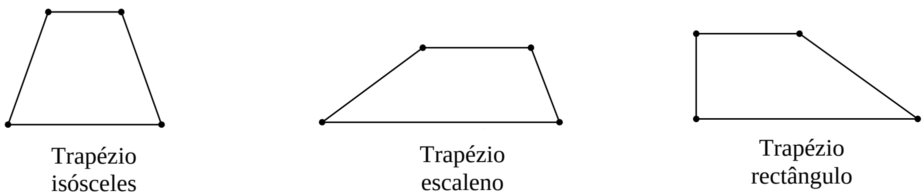
3.3. Constrói um triângulo obtusângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.



4. Existem três tipos de trapézios, que podem ser obtidos facilmente a partir de triângulos. Constrói um triângulo isósceles, um escaleno e um rectângulo, e, para cada um deles, traça uma recta paralela a um lado, como mostra a figura seguinte.



A partir das figuras, constrói um trapézio de cada tipo.



Mede os lados e os ângulos internos dos trapézios.

4.1. Há alguma relação entre os lados e entre os ângulos do trapézio isósceles? Se sim, qual?

4.2. Há alguma relação entre os lados e entre os ângulos do trapézio escaleno? Se sim, qual?

4.3. Há alguma relação entre os lados e entre os ângulos do trapézio rectângulo? Se sim, qual?

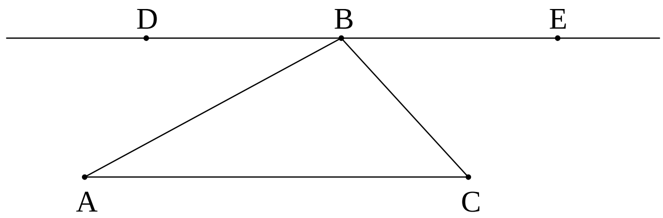
Tarefa 1A – Ângulos internos de um triângulo (PL)

1. Constrói um triângulo ABC.

1.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC e adiciona as medidas obtidas.

1.2. Constrói outros triângulos. Para cada um deles, mede as amplitudes dos seus ângulos internos e adiciona as medidas obtidas. Formula uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos internos num triângulo qualquer.

2. Considera o triângulo ABC da figura e a recta DE, paralela ao lado AC do triângulo, que passa pelo vértice B.



2.1. Qual é a relação entre os ângulos ABD e BAC? Porquê?

2.2. Qual é a relação entre os ângulos CBE e ACB? Porquê?

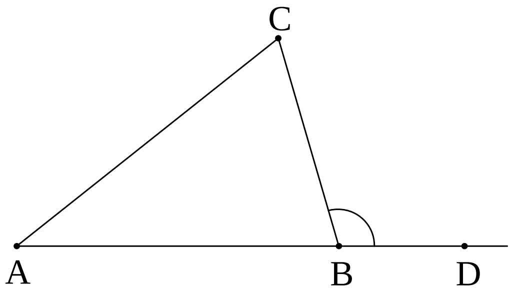
2.3. Qual é o valor da soma dos ângulos ABD, CBE e ABC? Porquê?

2.4. Qual é o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Porquê?

2.5. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

3. Na pergunta 1.2., depois de construir quatro triângulos diferentes e adicionar as amplitudes dos seus ângulos internos, o João formulou a seguinte conjectura: “A soma das amplitudes dos ângulos internos num triângulo é sempre igual a 179º”. Mas, depois de ter resolvido a questão 2., afirmou: “O processo que seguimos em 1.2. pode conduzir a erros, mas isso não acontece com o processo usado nesta questão”. Concordas com esta afirmação? Porquê?

4. Constrói uma semi-recta AB e um ponto C não pertencente à semi-recta. Depois constrói o triângulo ABC e um ponto D como mostra a figura. Dizemos que o ângulo CBD é um ângulo externo do triângulo ABC.



4.1. Mede as amplitudes dos ângulos BAC e ACB e adiciona-as. Mede a amplitude do ângulo CBD. O que concluis?

4.2. A conclusão que tiraste em 4.1. mantém-se se o ponto C estiver noutra posição? Porquê?

4.3. Depois de resolver as perguntas 4.1 e 4.2, o Francisco fez a seguinte afirmação: “Num triângulo qualquer, a amplitude do ângulo externo de um dos vértices é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices”. Esta afirmação é verdadeira ou falsa? Porquê?

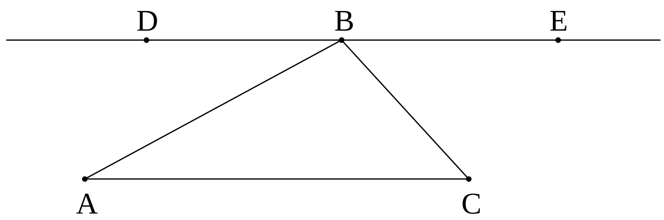
Tarefa 1B – Ângulos internos de um triângulo (AGD)

1. Constrói um triângulo ABC.

1.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC e adiciona as medidas obtidas.

1.2. Arrasta um vértice qualquer de modo a obteres um novo triângulo. Verifica o que se passa com as amplitudes dos ângulos e com a respectiva soma. Formula uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos internos num triângulo qualquer.

2. Considera o triângulo ABC da figura e a recta DE, paralela ao lado AC do triângulo, que passa pelo vértice B.



2.1. Qual é a relação entre os ângulos ABD e BAC? Porquê?

2.2. Qual é a relação entre os ângulos CBE e ACB? Porquê?

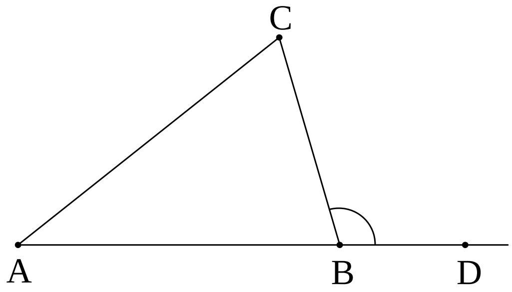
2.3. Qual é o valor da soma dos ângulos ABD, CBE e ABC? Porquê?

2.4. Qual é o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Porquê?

2.5. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

3. O João construiu vários triângulos sem utilizar o computador. Ao adicionar as amplitudes dos ângulos internos formulou a seguinte conjectura: "A soma dos ângulos internos num triângulo é sempre igual a 179º". Mas, depois de ter resolvido a questão 2., afirmou: "Medir as amplitudes dos ângulos pode conduzir a erros, mas isso não acontece com o processo usado nesta questão". Concordas com esta afirmação? Porquê?

4. Constrói uma semi-recta AB e um ponto C não pertencente à semi-recta. Depois constrói o triângulo ABC e um ponto D como mostra a figura. Dizemos que o ângulo CBD é um ângulo externo do triângulo ABC.



4.1. Mede as amplitudes dos ângulos BAC e ACB e adiciona-as. Mede a amplitude do ângulo CBD. O que concluis?

4.2. A conclusão que tiraste em 4.1. mantém-se se o ponto C estiver noutra posição? Porquê?

4.3. Após resolver as questões 4.1 e 4.2, o Francisco fez a seguinte afirmação: “Num triângulo qualquer, a amplitude do ângulo externo de um dos vértices é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices”. Esta afirmação é verdadeira ou falsa? Porquê?

Tarefa 1 – Ângulos internos de um triângulo

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos, os alunos devem ser capazes de:

- Medir, em graus, a amplitude de um ângulo;
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos, bem como ângulos alternos internos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com a soma das amplitudes dos ângulos internos e com a amplitude de um ângulo externo de um triângulo.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Identificarem e usarem raciocínio indutivo e dedutivo;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. No 2.º ciclo os alunos estudam o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, recorrendo a processos informais, apoiados em materiais didácticos ou num ambiente de Geometria Dinâmica. Esta tarefa retoma este tópico, aprofundando o trabalho então realizado. Mesmo os alunos que nunca trabalharam este tópico podem resolver a tarefa proposta sem necessidade de fazer previamente o que está indicado no programa do 2.º ciclo.

A tarefa requer que o aluno use tanto raciocínio indutivo como dedutivo. A questão 3. permite comparar os dois tipos de raciocínio ao pôr em evidência as respectivas potencialidades, ou seja, a formulação de conjecturas (enunciados genéricos) a partir do estudo de casos particulares, no caso do raciocínio indutivo, e a demonstração lógica dessas conjecturas (quando válidas), no caso do raciocínio dedutivo.

Os alunos têm alguma propensão para generalizar apressadamente as conclusões que tiram no estudo de um número reduzido de casos particulares. Por isso, o professor deve sublinhar que as conclusões retiradas a partir da análise de alguns casos particulares (nomeadamente na pergunta 1.2.) não são, necessariamente, válidas em todos os casos. As perguntas 2.5. e 4.2. proporcionam uma oportunidade para o professor chamar a atenção dos alunos para o facto dos argumentos apresentados serem válidos em geral apesar de o raciocínio ter sido apoiado em esquemas que representam triângulos particulares.

Sugere-se que os alunos trabalhem em pares. A aula deve ser organizada de modo a contemplar um momento final de discussão com toda a turma ou um momento de discussão colectiva depois da questão 2. e uma nova discussão no final da questão 3. Em qualquer destes casos, após a discussão da questão 3., o professor deve fazer uma síntese do trabalho realizado em que dá relevo aos resultados matemáticos obtidos (a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º; a amplitude do ângulo externo de um dos vértices de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices) e aos processos usados para obtê-los. É de salientar que o processo indutivo envolve a análise de casos particulares e, a partir deles, a formulação de conjecturas, ao passo que o raciocínio dedutivo permite garantir a validade das proposições (propriedades) em todos os casos.

Um dos aspectos importantes da comunicação matemática é o uso de notação, simbologia e vocabulário próprios. O professor deve sugerir aos alunos que usem uma escrita abreviada, de um modo consistente, para representar as entidades geométricas estudadas nesta tarefa. Nesta fase da sua aprendizagem, os alunos devem usar uma notação simplificada que abrevie a comunicação escrita, com o objectivo de a agilizar, evitando-se formalismos desnecessários. No quadro seguinte dão-se exemplos disso:

Entidade geométrica	**Notação utilizada**
Triângulo de vértices A, B e C	Triângulo ABC
Recta que contém os pontos A e B	Recta AB
Ângulo de vértice em B formado pela união das semi-rectas BA e BC	Ângulo ABC
Medida da amplitude do ângulo ABC	$\angle$ABC

O professor deve chamar a atenção dos alunos para a distinção entre os conceitos de ‘ângulo’, ‘amplitude do ângulo’ e ‘medida da amplitude do ângulo’ e para o facto de que na comunicação oral é frequente dizer-se ‘amplitude do ângulo ABC’ como abreviatura de ‘medida da amplitude do ângulo ABC’.

2. Exploração matemática. Na pergunta 1.1., pretende-se que os alunos formulem uma conjectura do tipo “a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º”. No entanto, o professor não deve forçar o enunciado desta conjectura se os alunos chegarem a valores diferentes devido a inevitáveis erros de leitura associados ao desenho de figuras.

Ainda na primeira questão, pretende-se que os alunos induzam o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo (perguntas 1.1. e 1.2.) e que deduzam que esse valor é 180º, através de uma sequência de perguntas (2.1., 2.2., 2.3.) reorganizadas numa pequena demonstração (que culmina nas perguntas 2.4. e 2.5.). A demonstração assenta no facto de que os pares de ângulos ABD, BAC e CBE, ACB têm a mesma amplitude, por serem alternos internos, e que a soma dos ângulos ABD, CBE e ABC é 180º, o que permite concluir que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º.

Se os alunos estiverem a trabalhar com papel e lápis (PL), a discussão final da tarefa pode incluir um diálogo semelhante a este (que é fictício):

P. *Qual é a relação entre os ângulos ABD e BAC?*

A1. *São iguais. Nós medimos os ângulos e vimos que são iguais.*

P. *Mas… São exactamente iguais ou aproximadamente iguais? O que é que acontece quando fazemos uma medição?*

A2. *Há sempre um erro. O erro pode ser grande ou pequeno, mas há sempre um erro.*

P. *Muito bem.*

A3. *Oh! Professor… Mas neste caso os ângulos são mesmo iguais porque são alternos internos.*

A4. *São o quê?*

A3. *Alternos internos! Demos isso o ano passado.*

P. *Queres explicar ao teu colega?*

A3. *Então… A recta que passa por A e por C é paralela à recta que passa por D e por E; e a recta que passa por A e por B corta essas paralelas. Os ângulos ABD e BAC estão em lados opostos dessa recta AB e do lado de dentro. Por isso é que se chamam internos. E os alternos internos são iguais.*

A4. *Ah! Já me lembro!*

P. *Então, e no caso dos ângulos CBE e ACB?*

A4. *É a mesma coisa. Também são ângulos alternos internos. Por isso são iguais.*

P. *Entretanto, todos chegaram à conclusão que a soma dos ângulos ABD, CBE e ABC* [assinala estes ângulos na figura] *é um ângulo raso, não é verdade? Então, qual é a resposta à pergunta 2.4.?*

A5. *180º.*

P. *Como chegaram a essa conclusão?*

A5. *Então… Acabámos de ver que a soma daqueles três ângulos dá 180º, não é? E também vimos que o ângulo do triângulo com vértice em A é igual ao ângulo ABD; e o ângulo do triângulo com vértice em C é igual ao ângulo CBE. Portanto, dá a mesma coisa.*

A6. *Só agora é que percebi porque é que estava ali a recta DE… No princípio achei esquisito mas agora percebo…*

P. *Óptimo. E se tivéssemos outro triângulo em vez deste? A soma dos ângulos internos ainda seria 180º?*

A7. *Claro. A soma não pode dar um número nuns triângulos e outro número noutros.*

P. *Porque achas que não?*

A7. *Porque são todos triângulos. Tem que dar sempre a mesma coisa.*

A8. *Eu acho que se pode fazer o mesmo para outro triângulo qualquer.*

P. *Queres explicar a tua ideia?*

A8. *Então… Se tivermos outro triângulo, podemos tirar uma paralela a um dos lados que passe pelo vértice do triângulo oposto a esse lado. E depois é só fazer o mesmo que fizemos para este… Dá 180º na mesma. Dá sempre…*

P. *Concordam com este argumento? Muito bem. Quais são os vossos comentários à afirmação do João?*

A9. *Está correcta. Porque quando medimos não dá mesmo, mesmo, 180º. É só uma aproximação. Mas o raciocínio que acabámos de fazer dá sempre certo. Usámos propriedades que sabemos que são certas… São sempre certas, portanto, nunca pode dar erro.*

No caso de os alunos terem utilizado um ambiente de geometria dinâmica (AGD), a discussão final pode incluir um diálogo semelhante ao anterior, uma vez que a diferença entre as abordagens não altera o raciocínio subjacente de modo significativo – no ambiente PL os alunos ou tiram conclusões a partir dos vários triângulos que constroem e no AGD fazem-no em resultado do arrastamento de vértices de triângulos.

É natural que os alunos já estejam convencidos de que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º, quer pela sua experiência anterior, quer pelo que observam no monitor do computador. Por isso, a indicação de razões que justificam essa propriedade, leva a que a demonstração tenha um propósito explicativo, para além de contribuir para convencer os alunos que ainda tenham reservas sobre a sua validade.

A questão 4. tem como objectivo relacionar a medida da amplitude do ângulo externo de um vértice de um triângulo com a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos dos outros vértices. Na pergunta 4.2. pretende-se que os alunos deduzam essa relação:

$\angle CBD = 180^{\circ} - \angle ABC$ (pois os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBD$ são suplementares),

$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^{\circ}$ (soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo). Logo, $\angle CBD = \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC - \angle ABC$.

Simplificando, $\angle CBD = \angle ACB + \angle BAC$.

Na pergunta 4.3. pretende-se que os alunos compreendam que a dedução que fizeram em 4.2., embora apoiada num esquema associado a um caso particular, pode ser generalizada a todos os triângulos.

3. Indicações suplementares. Como complemento da aprendizagem, o professor pode indicar outros problemas e exercícios nos quais sejam utilizados os teoremas estudados nesta tarefa, nomeadamente

- A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º;
- A amplitude do ângulo externo de um dos vértices de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices.

Explorações de alunos

Algumas das questões desta tarefa foram exploradas na sala de aula. Os alunos dispuseram de um AGD e trabalharam aos pares. Observaram-se algumas dificuldades dos alunos em responder a diversas questões, pois ao focarem a sua atenção nos valores numéricos que surgiam no monitor, acabaram por dar respostas numéricas a essas questões, em vez de prestarem atenção às relações entre as amplitudes dos ângulos. Isto pode ter a ver com o facto que os alunos não tinham tido um contacto anterior significativo com este tipo de *software*. Por vezes, surgiram também dificuldades na interpretação de alguns termos, como é o caso da palavra "conjectura".

A seguinte conjectura foi escrita por um aluno na resposta à pergunta 1.2.:

Sempre que o vértice é arrastado,
todas as amplitudes são alteradas,
embora a soma dê sempre
o mesmo resultado. (180º).

O aluno basicamente descreve o que observa no monitor, mas não formula a conjectura em termos aceitáveis, ao contrário do se verifica na conjectura seguinte:

> A soma dos ângulos internos
> é sempre 180°.

A questão 2. pretende orientar os alunos na formulação de uma cadeia argumentativa, que demonstre que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Eis alguns dos argumentos que constituem essa cadeia:

> Os ângulos $\angle ABD$ e $\angle BAC$ são iguais porque são ân
> gulos internos alternos.
>
> Os ângulos $\angle CBE$ e $\angle ACB$ são iguais porque são
> ângulos internos alternos.
>
> A soma dos três
> ângulos dá 180,00°

Nota-se que as duas afirmações iniciais estão justificadas, o que não acontece na última. O professor pode colocar questões que levem os alunos a justificar todas as afirmações parciais que compõem a cadeia argumentativa que demonstra a conjectura.

Na pergunta 4.1., os alunos, com a experiência que vão adquirindo, escrevem conjecturas como a seguinte e tentam encontrar uma demonstração (4.3.):

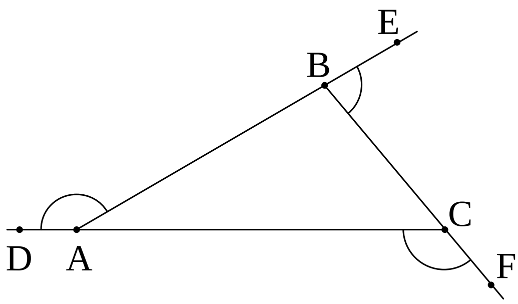
> $\angle CBD$ = é um ângulo externo
>
> O ângulo $\angle CBD$ é igual ao ângulo $\angle BAC$ mais
> $\angle ACB$
>
> $\boxed{\angle CBD = \angle BAC + \angle ACB}$

O exemplo seguinte de resposta à pergunta 4.3., foi escrito pelos alunos durante a discussão geral, depois de terem tentado responder à questão em cada grupo. Por vezes foi necessário que o professor desbloqueasse uma ou outra dificuldade como foi o caso dos 4.º e 5.º passos:

> 1.º passo → $\angle CBD + \angle ABC = 180°$
>
> 2.º passo → $\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 180°$
>
> 3.º passo → $\angle ABC = 180° - \angle CBD$
>
> 4.º passo → $\angle ABC + 180 - \angle CBD + \angle BAC = 180°$
>
> 5.º passo → $\angle ACB + \angle BAC = 180° - 180° + \angle CBD$
>
> 6.º passo → $\angle ACB + \angle BAC = \angle CBD$

Tarefa 2A – Ângulos externos de um triângulo (PL)

1. Constrói um triângulo ABC. Prolonga os seus lados, como mostra a figura, e acrescenta os pontos D, E e F.



1.1. Mede as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF e adiciona as medidas obtidas. O que concluis?

1.2. Constrói outros triângulos. Para cada um deles, mede as amplitudes dos seus ângulos externos e adiciona as medidas obtidas. Formula uma conjectura sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos num triângulo qualquer.

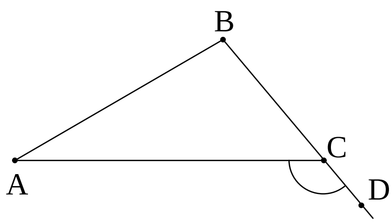
2. Considera novamente o triângulo ABC da figura anterior.

2.1. Qual é o valor da soma $\angle$ DAB+ $\angle$ BAC+ $\angle$ EBC+ $\angle$ ABC+ $\angle$ ACF+ $\angle$ BCA?

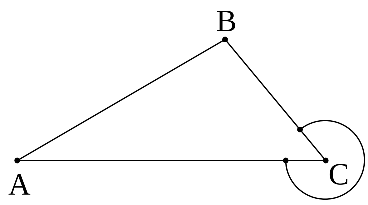
2.2. Tendo em atenção que o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, qual é o valor da soma dos ângulos externos no triângulo ABC?

2.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

3. As figuras seguintes sugerem duas definições possíveis para ângulo externo.

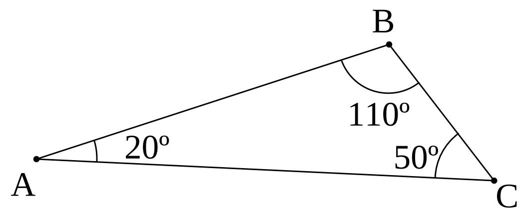


Definição 1



Definição 2

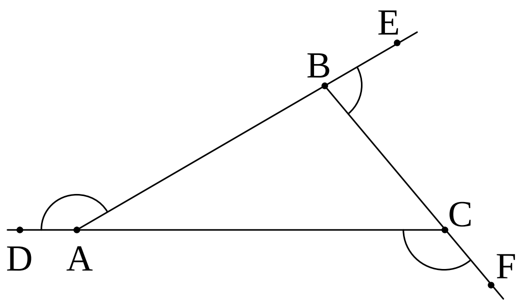
3.1. Observa o triângulo ABC da figura. Calcula a soma dos ângulos externos deste triângulo de acordo com a definição 1 e com a definição 2 de ângulo externo.



3.2. Qual é a possível vantagem de se usar a definição 1?

Tarefa 2B – Ângulos externos de um triângulo (AGD)

1. Constrói um triângulo ABC. Prolonga os seus lados, como mostra a figura, e acrescenta os pontos D, E e F.



1.1. Mede as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF e adiciona as medidas obtidas. O que concluis?

1.2. Arrasta um dos vértices do triângulo e escreve uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo. Formula uma conjectura sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos num triângulo qualquer.

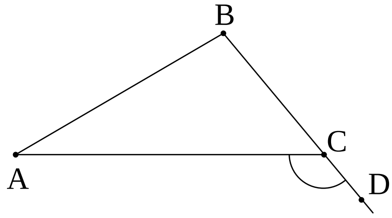
2. Considera novamente o triângulo ABC da figura anterior.

2.1. Qual é o valor da soma $\angle$ DAB+$\angle$ BAC+$\angle$ EBC+$\angle$ ABC+$\angle$ ACF+$\angle$ BCA?

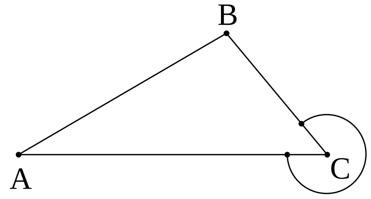
2.2. Tendo em atenção que o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, qual é o valor da soma dos ângulos externos no triângulo ABC?

2.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

3. As figuras seguintes sugerem duas definições possíveis para ângulo externo.

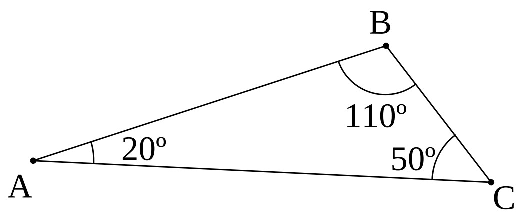


Definição 1



Definição 2

3.1. Observa o triângulo ABC da figura. Calcula a soma dos ângulos externos deste triângulo de acordo com a definição 1 e com a definição 2 de ângulo externo.



3.2. Qual é a possível vantagem de se usar a definição 1?

Tarefa 2 – Ângulos externos de um triângulo

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos, e na tarefa anterior, os alunos devem ser capazes de:

- Medir, em graus, a amplitude de um ângulo;
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos, bem como ângulos alternos internos;
- Compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Identificarem e usarem raciocínio indutivo e dedutivo;
- Compreenderem o papel das definições em matemática;
- Discutirem resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. No 2.º ciclo os alunos estudam o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo, recorrendo a processos informais, apoiados em materiais didácticos ou num ambiente de Geometria Dinâmica. Esta tarefa retoma este tópico, aprofundando o trabalho então realizado, e utiliza o conhecimento de que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º que foi objecto de trabalho na aula anterior. Mesmo os alunos que nunca trabalharam este tópico podem resolver a tarefa proposta sem necessidade de fazer previamente o que está indicado no programa do 2.º ciclo.

A tarefa requer que o aluno use tanto raciocínio indutivo (pergunta 1.2.) como dedutivo (pergunta 2.3.). Como os alunos têm alguma propensão para generalizar apressadamente as conclusões que tiram no estudo de um número reduzido de casos particulares, o professor deve sublinhar que essas conclusões (nomeadamente na pergunta 1.2) não são, necessariamente, válidas em todos os casos. A pergunta 2.3. permite ao professor chamar a atenção dos alunos para o facto de os argumentos apresentados nas perguntas 2.1. e 2.2. serem válidos em geral, para qualquer triângulo, apesar de o raciocínio ter sido apoiado num esquema que representa um triângulo particular.

Sugere-se que os alunos trabalhem em pares. A aula deve ser organizada de modo a contemplar um momento final de discussão com toda a turma ou um momento de discussão colectiva após a questão 2 e uma nova discussão no fim da questão 3. Em qualquer destes casos, na discussão do seu trabalho, os alunos devem intervir de modo organizado, falando um de cada vez, garantindo-se-lhes a oportunidade de expressar as suas ideias até ao fim e de interpelar os colegas, pedindo-lhes para clarificarem algum aspecto da sua intervenção. O professor pode estimular a troca de ideias levantando algumas questões adicionais e redireccionando linhas de argumentação pouco úteis. Este tipo de situações que os alunos aprendem a discutir resultados, ideias e processos matemáticos.

No final da discussão da questão 3., o professor deve fazer uma síntese do trabalho realizado, em que dá relevo ao resultado matemático obtido (a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é 360º) e aos processos usados para obtê-lo. É de salientar que o processo indutivo envolve a análise de casos particulares e, a partir deles, a formulação de conjecturas, ao passo que o raciocínio dedutivo permite garantir a validade das proposições (propriedades) em todos os casos. O professor salienta ainda o papel das definições (em Matemática) na obtenção de determinadas propriedades e que as definições, frequentemente, são adoptadas não da forma que parece mais óbvia ou natural mas da forma que proporciona propriedades matemáticas mais interessantes.

2. Exploração matemática. O primeiro grupo de perguntas volta a fazer para a soma das amplitudes dos ângulos externos do triângulo, o que havia sido feito para a soma das amplitudes dos ângulos internos. Inicialmente, os alunos induzem o valor pedido partindo da medição das amplitudes dos três ângulos externos dos triângulos que constroem (perguntas 1.1. e 1.2.). Em seguida, deduzem que o valor correcto é 360º (mesmo que não o tenham induzido) numa pequena demonstração que utiliza o valor da soma dos ângulos internos do triângulo (perguntas 2.1., 2.2. e 2.3.).

Caso os alunos estejam a trabalhar com papel e lápis, a discussão final das questões 1. e 2. pode incluir um diálogo semelhante a este (que é fictício):

P. *Qual é a soma das amplitudes dos ângulos externos do triângulo ABC da figura?*

A1. *É 360º. Quer dizer… Mais ou menos!*

P. *E os outros grupos? Qual foi o valor que obtiveram para esta soma?*

A2. *Foi o mesmo. Também deu mais ou menos 360º.*

A3. *Oh! Professor! Vimos na última aula que quando fazemos medições há sempre um erro. Por isso é que não dá exactamente 360º.*

P. *Muito bem. Então… Qual foi a conjectura que elaboraram a partir dos triângulos que construíram?*

A4. *A soma dos ângulos externos dum triângulo qualquer é sempre 360º.*

A5. *É giro porque… A soma dos ângulos internos é 180º e a dos ângulos externos é 360º. É o dobro!*

P. *Alguém quer explicar porque razão dá o dobro?*

A3. *É fácil. Se pensarmos num vértice… A, por exemplo. A soma do ângulo interno com o ângulo externo em A dá um ângulo raso. Como o triângulo tem três vértices, a soma de todos os ângulos internos e externos dá 3 ângulos rasos. Mas, sabemos que a soma dos ângulos internos é um ângulo raso. Então, sobram dois ângulos rasos…*

P. *A vossa ideia é a mesma?*

A4. *Pois, era isso. Porque os ângulos internos mais os ângulos externos dá 3 ângulos rasos. Como os ângulos internos dão um ângulo raso os ângulos externos têm que dar dois ângulos rasos.*

P. *Será que este argumento pode ser aplicado a qualquer triângulo? Essa era a pergunta 2.3., certo?*

A6. *Claro… É a mesma coisa. Dá para todos os triângulos.*

Na terceira questão, pretende-se que os alunos analisem duas possíveis definições de ângulo externo. Na pergunta 3.2., os alunos concluem que se se adoptar a definição 2, a amplitude do ângulo externo passa a ser a soma da amplitude do ângulo externo na definição 1 com 180º. Ou seja, a definição 2 contêm uma parcela de 180º que é ‘inútil’. Por isso, os matemáticos adoptam a definição 1 que, embora talvez não seja a mais natural, é a mais simples e gera propriedades mais interessantes (por exemplo, “a amplitude do ângulo externo de um dos vértices de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices”).

A discussão final da questão 3. pode incluir um diálogo semelhante a este (que é fictício):

P. *Qual é a soma das amplitudes dos ângulos externos do triângulo ABC da figura, de acordo com a definição 1?*

A1. *É 360º. Foi o que vimos há bocado.*

P. *E os outros grupos? Qual foi o valor que obtiveram para esta soma?*

A2. *Foi o mesmo. Também deu 360º.*

P. *Muito bem. E qual é o valor da soma de acordo com a definição 2?*

A3. *Dá 3 ângulos giros menos 1 ângulo raso.*

A4. *O quê? Não percebi nada!*

A3. *É fácil… Olha para o vértice C na definição 2. Está lá marcado o ângulo externo, não está?*

A4. *Sim.*

A3. *Então… No vértice C, o ângulo interno mais o ângulo externo dá um ângulo giro, não dá?*

A4. *Dá.*

A3. *Quantos vértices tem o triângulo?*

A4. *Tem 3.*

A5. *Ah! Já percebi! Em cada vértice, o ângulo interno mais o ângulo externo dá um ângulo giro. Portanto, se quisermos só os ângulos externos dá 3 ângulos giros menos a soma dos ângulos internos… que é um ângulo raso.*

A6. *Nós contámos 5 ângulos rasos… Dá a mesma coisa. É 900º.*

A7. *Oh! Professor! Já não estou a perceber nada! Afinal, o que é o ângulo externo? Nós é que escolhemos?*

P. *Bem… Na verdade usa-se apenas uma definição de ângulo externo. Tem que ser assim, não é? Se usássemos mais do que uma definição de ângulo externo, obteríamos valores diferentes para a mesma soma. Como neste caso! Ora, isso não é desejável, pois não?*

A8. *Mas aqui usámos duas definições… E não dá a mesma coisa.*

P. *É verdade. Mas, usámos duas definições para fazermos uma comparação. Em Matemática podemos definir conceitos… Podemos dizer 'isto é assim'… Como bem entendermos. Nós é que decidimos isso. No entanto, algumas definições podem ser complicadas demais… Podem complicar-nos a vida. Vamos comparar as duas definições. Qual delas vos parece a mais natural?*

A8. *A definição 2.*

P. *Porquê?*

A8. *Porque… Se o ângulo interno é o que está por dentro, o externo é o que está por fora!*

P. *E qual delas dá cálculos mais simples?*

A9. *A definição 1. Tem menos contas…*

P. *A soma das amplitudes dos ângulos externos na definição 1 dá 360º e na definição 2 dá 900º. Foi o que vimos, não foi? Quanto dá a mais?*

A10. *540º.*

P. *De onde vêm esses 540º?*

A10. *Então… É a parte que temos que somar a mais… São aqueles 3 ângulos rasos.*

P. *O que resulta desta comparação entre as definições? Qual é a mais natural… E qual é a que dá menos trabalho de cálculo?*

A11. *A mais natural é a 2…A que dá menos trabalho é a 1…*

P. *Se tivessem que escolher uma delas, qual escolheriam?*

Vários A. *A que dá menos trabalho!*

P. *Os matemáticos também escolheram a definição 1. É a definição oficial!*

A12. *Então é essa que precisamos de saber?*

P. *Exactamente. Vejam outro aspecto importante. Uma parte do trabalho dos matemáticos é descobrir propriedades interessantes. Há pouco vimos uma propriedade interessante… A soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é o dobro da soma das amplitudes dos seus ângulos internos. É uma propriedade simples e interessante, não acham?*

A12. *Eu achei espectacular!*

P. *Que definição foi usada para deduzirmos essa propriedade?*

A12. *Foi a 1.*

P. *E se tivéssemos usado a definição 2?*

A12. *Já não dava o dobro.*

P. *Nesse caso iríamos perder uma propriedade interessante, estão a ver?*

No caso de os alunos terem utilizado um ambiente de geometria dinâmica é natural que já estejam convencidos de que a soma dos ângulos externos do triângulo é 360º, uma vez que é o que observam no monitor ao arrastarem qualquer um dos seus vértices. Também neste caso a demonstração tem um papel predominantemente explicativo, levando os alunos a compreender as razões pelas quais a referida soma é igual a 360º.

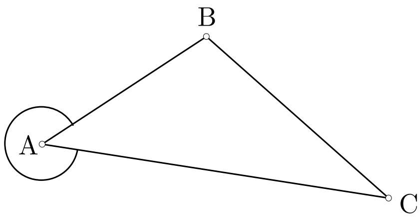
O professor pode prolongar um pouco mais a exploração desafiando os alunos a encontrar uma propriedade que relacione a amplitude do ângulo externo de um dos vértices de um triângulo com a soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices, recorrendo à definição 2. Considerando o triângulo ABC da figura e designando a medida da amplitude do ângulo externo no vértice A (segundo a definição 2) por $\angle \mathrm{extA}$, tem-se:

$\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{ACB} + \angle \mathrm{CBA} = 180^{\circ}$ (soma das amplitudes dos ângulos internos),

$\angle \text{extA} + \text{A} = 360^{\text{o}}$ (a soma da amplitudes dos ângulos interno e externo em cada vértice é um ângulo giro, segundo a definição 2)

$\angle \text{extA} + \text{A} = 2\left(\angle \text{BAC} + \angle \text{ACB} + \angle \text{CBA}\right)$ (pelas relações anteriores)

$\angle \text{extA} = 180^{\text{o}} + \angle \text{ACB} + \angle \text{CBA}$ (simplificando a relação anterior)



Obter-se-ia assim a propriedade: "Num triângulo, a amplitude do ângulo externo num vértice é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos nos outros dois vértices com um ângulo raso".

3. Indicações suplementares. Como complemento da aprendizagem, o professor pode indicar problemas e exercícios nos quais sejam utilizados os teoremas estudados nesta tarefa, nomeadamente

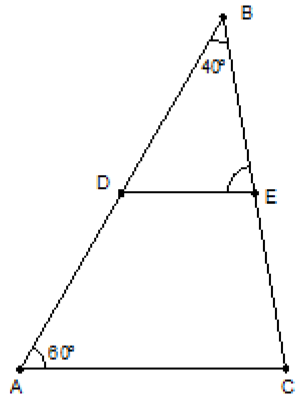
- A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º;
- A amplitude do ângulo externo de um dos vértices de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices;
- A soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é 360º.

Tarefa 3 – Resolução de problemas em triângulos (PL)

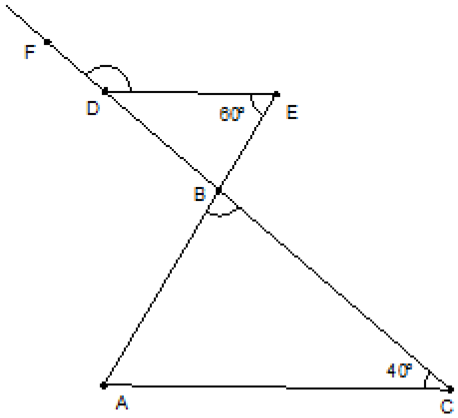
Responde às seguintes questões apresentado os cálculos que efectuares.

1. Nas figuras seguintes estão representados os triângulos ABC e DBE, em que os lados AC e DE são paralelos.

1.1. Qual é a amplitude do ângulo DEB?

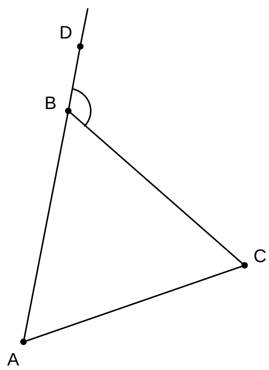


1.2. Qual é a amplitude do ângulo ABC e do ângulo FDE?

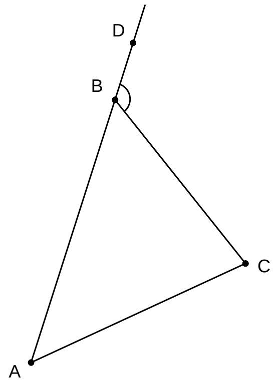


2. Nas seguintes figuras está representado um triângulo ABC.

2.1. Se o triângulo ABC for equilátero, qual é a amplitude do ângulo CBD?

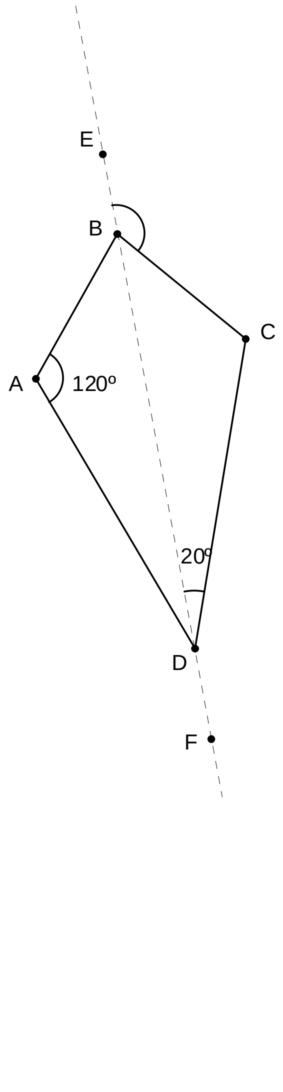


2.2. Entre que valores pode variar a amplitude do ângulo DBC?

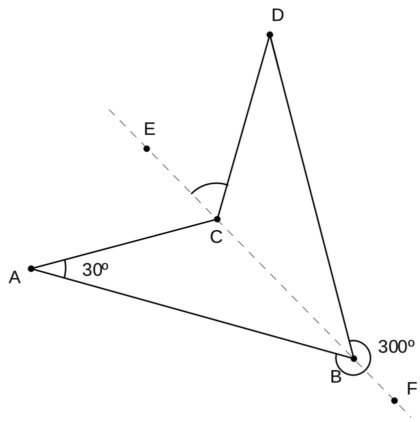


3. Nas seguintes figuras a recta EF é um eixo de simetria do quadrilátero ABCD.

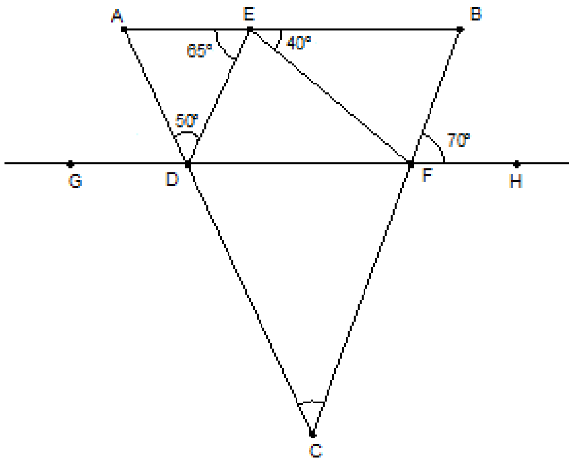
3.1. Qual é a amplitude do ângulo EBC?



3.2. Qual é a amplitude do ângulo ECD?



4. Na seguinte figura estão representados os triângulos ABC e DEF. A recta GH é paralela ao lado AB. Qual é a amplitude do ângulo ACB?



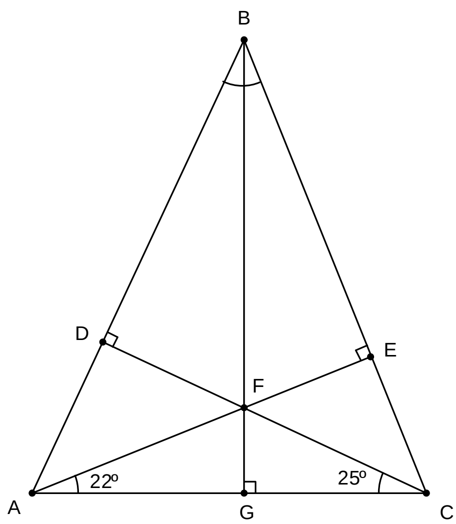
5. Na seguinte figura está representado o triângulo ABC, que respeita as seguintes condições:

DF é perpendicular a AB (DF $\perp$ AB)

GF é perpendicular a AC (GF $\perp$ AC)

EF é perpendicular a BC (EF $\perp$ BC)

Qual é a amplitude do ângulo ABC?



Tarefa 3 – Resolução de problemas em triângulos

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem ser capazes de:

- Compreender relações entre elementos de um triângulo (lados, ângulos internos e ângulos externos) e usá-las na resolução de problemas;
- Compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo;
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos, bem como ângulos alternos internos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Ser capazes de resolver problemas envolvendo a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema;
- Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa foi pensada para que os alunos prossigam o trabalho iniciado na tarefa 1, onde estudaram propriedades relacionadas com os ângulos internos e externos de um triângulo, recorrendo a conceitos já estudados no 2.º ciclo (incluindo ângulos complementares, suplementares, correspondentes, verticalmente opostos e alternos internos). Sugere-se que o professor seleccione alguns dos problemas propostos, se pretender utilizar apenas um bloco lectivo. Caso decida utilizar dois blocos, poderá dividir a tarefa em duas partes: (i) questões 1 e 2 e (ii) questões 3, 4 e 5.

Esta tarefa poderá ser realizada em grupo, com um momento de discussão final para que os alunos apresentem as suas resoluções e analisem as resoluções dos colegas. Durante o trabalho de grupo, o professor observa de perto a actividade dos alunos, procurando não responder directamente às questões que estes possam colocar, mas devolvendo-lhes essas questões, de modo a que eles possam continuar o seu raciocínio. Além disso, o professor intervém, se necessário, ajudando os alunos a assumirem uma melhor organização do trabalho e a aperfeiçoarem a comunicação dentro do grupo, discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Na síntese final, o professor chama a atenção para o que são os dados, condições e objectivos de um problema. Além disso, dá relevo ao facto de existirem estratégias diferentes na resolução de um mesmo problema e discute com os alunos a existência de estratégias mais económicas na resolução de um problema, mesmo que não se utilize toda a informação presente no respectivo enunciado.

2. Exploração matemática. Na questão 1., uma estratégia para resolver os problemas propostos passa pela utilização da igualdade das amplitudes de ângulos de lados paralelos, em particular, os ângulos internos alternos. Na resolução destes problemas os alunos devem ser capazes de usar os conhecimentos já aprendidos sobre a soma de ângulos internos de um triângulo.

Na pergunta 1.1., a resolução pode basear-se nas seguintes estratégias, sendo desejável que sejam ambas abordadas na discussão final:

Estratégia 1:

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^{o}$ (soma dos ângulos internos de um triângulo)

$$\angle BCA = 180 - 40 - 60 = 80^{o}$$

$\angle BCA = \angle BED$ (ângulos correspondentes).

Logo, $\angle BED = 80^{o}$

Estratégia 2:

$\angle BAC = \angle BDE = 60^{o}$ (ângulos correspondentes)

$\angle DBE + \angle BED + \angle BDE = 180^{o}$ (soma dos ângulos internos de um triângulo)

Logo, $\angle BED = 180 - 40 - 60 = 80^{o}$

Na pergunta 1.2., a resolução pode passar por várias estratégias (utilizando ângulos verticalmente opostos e ângulos suplementares e o facto que a amplitude do ângulo externo de um dos vértices é igual à soma dos ângulos internos dos outros vértices). Por exemplo,

$$\angle BAC = \angle DEB = 60^{o} \text{ (ângulos internos alternos)}$$

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^{o} \text{ (soma dos ângulos internos de um triângulo}$$

$$\angle ABC = 180 - 40 - 60 = 80^{o}\ .$$

e

$$\angle EBD = \angle BCA = 40^{o} \text{ (ângulos internos alternos)}$$

Como $\angle EBD$ e $\angle FDE$ são ângulos suplementares, $\angle FDE = 180 - 40 = 40^{o}$.

A primeira pergunta da questão 2. serve para que os alunos contactem desde logo com a situação problemática que é apresentada na segunda alínea. O facto de o triângulo ser equilátero implica que a amplitude do ângulo ABC é 60º e, portanto, a amplitude do ângulo DBC, que é suplementar do ângulo ABC é 120º. Outro raciocínio possível tem por base a propriedade da amplitude do ângulo externo de um dos vértices ser igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros vértices.

A pergunta 2.2. pode dar origem a um diálogo matemático muito rico entre os alunos, uma vez que se refere à variação da amplitude do ângulo DBC, que depende da amplitude dos ângulos CAB e BCA. É natural que esta situação leve à discussão sobre a existência ou não do triângulo nos casos limite: pode o ângulo DBC medir 0º ou 180º? Neste caso, como em muitos outros, a figura degenerada já não tem as mesmas propriedades da figura original.

Para responder à questão 3. é preciso utilizar: (i) numa figura com um eixo simetria, ângulos correspondentes têm a mesma amplitude; (ii) a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º; e (iii) a soma das amplitudes de ângulos suplementares é 180º.

A resposta ao problema da questão 4. implica seleccionar uma estratégia entre várias e levá-la até ao fim. O professor pode discutir com os alunos que estratégia é a mais económica em termos de passos e quais deveriam ser as condições mínimas dadas no enunciado do problema que permitissem ainda resolvê-lo.

A propósito da questão 4., o professor pode referir que no enunciado de um problema eventualmente há informação irrelevante – neste caso o valor da amplitude do ângulo BEF (40º). No problema da questão 5. o professor pode discutir com os alunos o facto de aparentemente BG ser um eixo de simetria do triângulo ABC, concluindo-se que se o fosse essa informação deveria estar contemplada no enunciado.

Para resolver a questão 5., os alunos podem utilizar vários caminhos. Por exemplo, podem calcular as amplitudes dos ângulos DAC e ECA, que são ângulos internos dos triângulos ADC e AEC, respectivamente. Na sua resolução, os alunos podem pensar que BG é um eixo de simetria, mas isso não pode ser assumido, uma vez que se tal acontecesse, o triângulo ABC teria que ser isósceles ou equilátero, o que não é referido no enunciado.

3. Indicações suplementares. Como complemento da aprendizagem, o professor pode sugerir que os alunos inventem problemas semelhantes aos que resolveram nesta tarefa. Pode ainda sugerir que os alunos visitem páginas da Internet que contêm exemplos dinâmicos que envolvem triângulos.

Tarefa 4A – Investigando congruências de triângulos (PL)

Vamos usar instrumentos de desenho para investigar questões relacionadas com a congruência de triângulos. Para verificares se dois triângulos são congruentes podes sobrepô-los para ver se coincidem, usando, por exemplo, um acetato. No final de cada questão, redige as conclusões a que chegaste, apresentando exemplos que as ilustrem. Pretende-se que descubras o número mínimo de lados e ângulos de um triângulo que é necessário serem iguais para que os dois triângulos sejam congruentes.

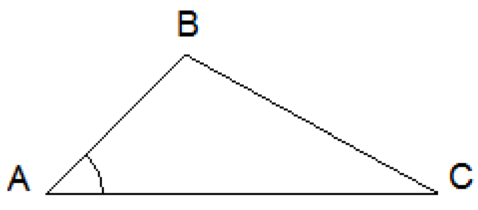
1. Constrói um triângulo a partir de três segmentos de recta à tua escolha. Depois disso procura construir um triângulo *diferente* do inicial usando segmentos de recta com os mesmos comprimentos dos anteriores.

1.1. Será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?

2. Constrói um triângulo com três ângulos à tua escolha. Depois disso tenta construir um triângulo *diferente* do inicial usando ângulos com as mesmas amplitudes dos anteriores.

2.1. Será que dois triângulos com os três ângulos congruentes são sempre congruentes?

3. Constrói um triângulo a partir de dois segmentos de recta e de um ângulo que eles formam, à tua escolha, por exemplo AB e AC. Depois disso tenta construir um triângulo *diferente* do inicial usando as medidas anteriores. Nota que o ângulo em causa é formado pelos segmentos de recta que escolheste.



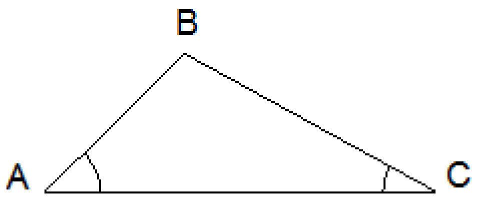
O ângulo BAC é formado pelos lados AB e AC do triângulo ABC.

3.1. Dois lados de um triângulo e um ângulo formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

4. Constrói um triângulo a partir de dois segmentos de recta à tua escolha e de um ângulo não formado por eles. Depois disso, tenta construir um triângulo *diferente* do inicial usando as mesmas medidas. Nota que o ângulo em causa não é formado pelos segmentos de recta que escolheste.

4.1. Dois lados de um triângulo e um ângulo não formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

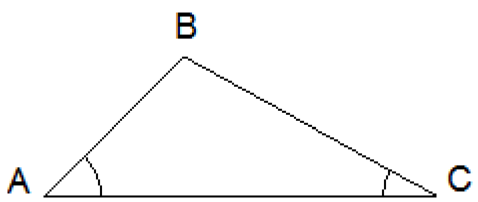
5. Constrói um triângulo a partir de um segmento de recta AC à tua escolha e de dois ângulos que têm esse segmento como lado comum. Depois disso, tenta construir um triângulo *diferente* do inicial usando as mesmas medidas.



O lado AC do triângulo ABC é comum aos ângulos BAC e BCA.

5.1. Dois ângulos de um triângulo que têm um lado comum são congruentes com os elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

6. Constrói um triângulo a partir de dois ângulos à tua escolha e de um segmento de recta não comum a esses ângulos (por exemplo AB). Depois disso, tenta construir um triângulo *diferente* do inicial usando as mesmas medidas.



O lado AB do triângulo ABC não é comum aos ângulos BAC e BCA.

6.1. Dois ângulos de um triângulo que não têm um lado em comum são iguais aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

Tarefa 4B – Investigando congruências de triângulos (AGD)

Dois triângulos são congruentes se têm, de um para o outro, os três lados e os três ângulos congruentes.

Ao longo desta tarefa, utilizando o software de geometria dinâmica, vais construir triângulos de várias maneiras e compará-los dois a dois. Pretende-se que descubras o número mínimo de lados congruentes e ângulos congruentes que dois triângulos têm que ter para podermos garantir que são congruentes.

1. Constrói um triângulo usando três segmentos de recta à tua escolha e mede o comprimento dos seus lados e a amplitude dos ângulos internos.

1.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando segmentos de recta com os mesmos comprimentos dos anteriores e mede a amplitude dos ângulos internos deste novo triângulo. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

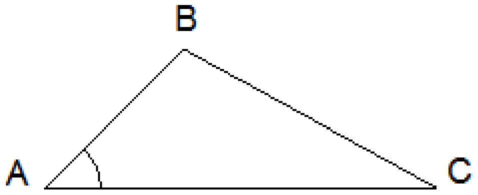
1.2. Será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?

2. Constrói um triângulo usando três ângulos à tua escolha e mede o comprimento dos seus lados e a amplitude dos seus ângulos internos.

2.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando ângulos com as mesmas amplitudes dos anteriores. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

2.2. Será que dois triângulos com os três ângulos congruentes são sempre congruentes?

3. Constrói um triângulo a partir de dois segmentos de recta e de um ângulo que eles formam, por exemplo AB e AC.



O ângulo BAC é formado pelos lados AB e AC do triângulo ABC.

3.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando as mesmas medidas do triângulo anterior, para os comprimentos de dois dos seus lados e para a amplitude do ângulo que eles formam. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

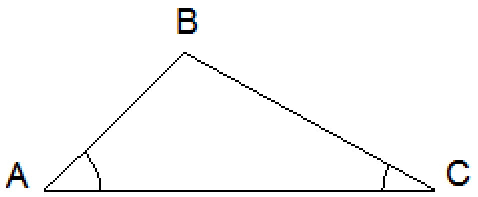
3.2. Dois lados de um triângulo e um ângulo formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

4. Constrói um triângulo a partir de dois segmentos de recta e de um ângulo de modo a que o ângulo não seja formado pelos dois segmentos de recta.

4.1. Constrói outro triângulo nestas condições, numa posição diferente do primeiro, mas usando as medidas anteriores. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

4.2. Dois lados de um triângulo e um ângulo não formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

5. Constrói um triângulo a partir de um segmento de recta AC e de dois ângulos que têm esse segmento como lado comum.

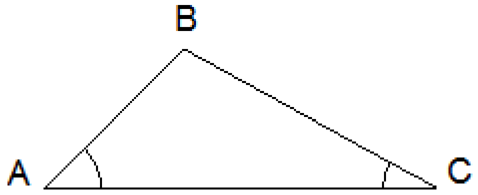


O lado AC do triângulo ABC é comum aos ângulos BAC e BCA.

5.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando um lado com o mesmo comprimento do anterior e dois ângulos com a mesma amplitude, que também tenham esse segmento como lado comum. Compara esse triângulo com o anterior. O que verificas?

5.2. Dois ângulos de um triângulo que têm um lado comum são congruentes com os elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

6. Constrói um triângulo a partir de dois ângulos à tua escolha e de um segmento de recta não comum a esses ângulos (por exemplo AB).



O lado AB do triângulo ABC não é comum aos ângulos BAC e BCA.

6.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando um lado com o mesmo comprimento do anterior e dois ângulos com as mesmas amplitudes dos anteriores, que também não tenham esse segmento como lado comum. Compara esse triângulo com o anterior. O que verificas?

6.2. Dois ângulos de um triângulo que não têm um lado em comum são iguais aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

Tarefa 4 – Investigando congruências de triângulos

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos, os alunos devem ser capazes de:

- Construir triângulos sendo dados os comprimentos dos três lados, os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado, ou as amplitudes de dois ângulos e o comprimento do lado comum a esses ângulos;
- Medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, pretende-se que os alunos:

- Compreendam a noção de congruência de triângulos;
- Conheçam os critérios LLL, LAL e ALA de congruência de triângulos.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Compreenderem o que é uma conjectura, um teorema, um exemplo e um contra-exemplo;
- Interpretarem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Nesta tarefa os alunos têm oportunidade de raciocinar indutivamente, formulando conjecturas a partir dos casos particulares que analisam. Os alunos têm de interpretar informação, ideias e conceitos, com destaque para os conceitos de congruência e critério de congruência.

Na tarefa 4A, a utilização dos acetatos permite verificar de forma eficaz a congruência dos triângulos. Na tarefa 4B será possível verificar as diversas situações num maior número de casos. Se não houver possibilidade dos alunos usarem, eles mesmos, computadores para realizar a investigação, o professor também pode efectuá-la interagindo com a turma, usando um computador e um projector de dados. Neste caso, o professor efectua as construções geométricas e vai colocando oralmente questões à turma. Pode solicitar que vários alunos o co-adjuvem, realizando as construções geométricas.

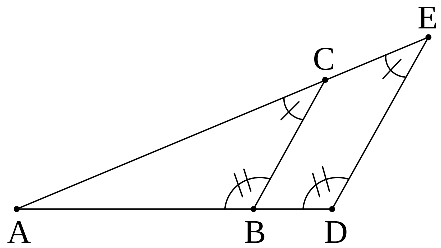
Qualquer que seja a opção, o professor pode começar por introduzir informalmente a noção de congruência dizendo, por exemplo: *Em geral os CD são fabricados com forma circular e 12 cm de diâmetro. Por isso, se tivermos dois CD deste tipo podemos sobrepô-los e ficamos com a sensação de ter apenas um CD um pouco mais grosso. No entanto, também existem CD com forma circular e 8 cm de diâmetro. Podemos sobrepor totalmente um CD destes a um dos anteriores? Neste caso, embora a forma seja a mesma, o tamanho é diferente. Em Matemática, as figuras que têm a mesma forma e as mesmas dimensões chamam-se congruentes. Quer dizer, podemos deslocar uma delas e sobrepô-la à outra, de modo que não conseguimos distingui-las. Quando é que dois círculos são congruentes?* [Quando têm o mesmo raio] *E dois segmentos de recta?* [Quando os seus comprimentos têm a mesma medida] *E dois ângulos?* [Quando as suas amplitudes têm a mesma medida] *E dois triângulos?* [Quando forem congruentes os pares de lados correspondentes – ou homólogos – e os pares de ângulos correspondentes – ou homólogos – nos dois triângulos].

Em seguida, os alunos organizam-se em grupos com vista trabalhar a tarefa proposta. O objectivo é que induzam os critérios LLL, LAL e ALA de congruência de triângulos. No caso da tarefa 4A, as construções de triângulos associadas a esta investigação podem realizar-se recorrendo a régua, compasso e transferidor que devem estar disponíveis para utilização dos alunos. Grupos diferentes podem investigar questões diferentes da tarefa. Se os alunos tiverem muita dificuldade em escolher ângulos e/ou segmentos de recta para efectuar as construções, o professor pode sugerir-lhes medidas concretas (por exemplo, na questão 1 sugerir a um grupo, para os lados de um triângulo, as medidas 7, 8 e 9; a outro grupo, as medidas 8, 9 e 10; etc.).

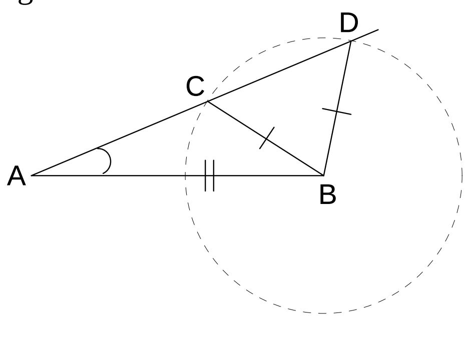
Depois do período de exploração, os diversos grupos redigem as suas conclusões. O professor conduz uma discussão final em que integra as contribuições dos diversos grupos. As conclusões dos alunos são apresentadas na forma de conjectura, nos casos em que não forem apresentados contra-exemplos. Por exemplo, os alunos conjecturam que três lados de um triângulo bastam para construir um triângulo congruente porque não conseguem construir nenhum que não o seja. Por outro lado, concluem que conhecer os três ângulos de um triângulo não é suficiente para construir um triângulo que seja congruente com ele e apresentam um contra-exemplo. Esta discussão é assim uma boa oportunidade para os alunos aprenderem a distinção entre "conjectura" e "teorema" bem como entre "exemplo" e "contra-exemplo". É importante acentuar a ideia de que, apesar de todos os exemplos encontrados confirmarem certa conjectura, não há garantia de que não existam contra-exemplos. Daí a necessidade de provar logicamente as conjecturas ou refutá-las. No entanto, no caso das conjecturas correctas a que os alunos chegaram nesta tarefa, o professor informa que são verdadeiras sem que proponha aos alunos a respectiva demonstração uma vez que não se pretende que eles saibam demonstrá-las. Em particular, o professor identifica os critérios LLL, ALA e LAL de congruência de triângulos.

Na síntese final, o professor põe em relevo o conceito de congruência de triângulos bem como os resultados matemáticos alcançados através da tarefa, designadamente os critérios LLL, LAL e ALA de congruência de triângulos. Pode referir, novamente, a distinção entre exemplo e contra-exemplo, e entre conjectura e teorema.

2. *Exploração matemática.* Um contra-exemplo para a questão 2. é dado pelos triângulos ABC e ADE da figura. De facto, admitindo que os lados BC e DE são paralelos, os três ângulos são congruentes. Isso acontece porque o ângulo com vértice em A é comum aos dois triângulos e os ângulos ABC e ADE bem como os ângulos ACB e AED são congruentes por serem ângulos correspondentes relativamente às secantes AD e AE, respectivamente. No entanto, os triângulos não são congruentes.



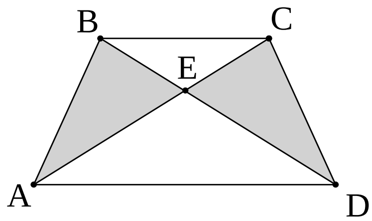
Os alunos talvez não cheguem facilmente a um contra-exemplo para a questão 4., que pretende averiguar-se se LLA também é um caso de congruência de triângulos. A figura seguinte fornece um possível contra-exemplo. De facto, os triângulos ABC e ABD não são congruentes apesar de terem o ângulo A em comum, o lado AB em comum e os lados BC e BD também congruentes.



Como AAL é um critério de congruência válido (questão 6.), os alunos não obterão contra-exemplos. Contudo, não se pretende que conheçam este critério.

Tarefa 5 – Usando critérios de congruência (PL)

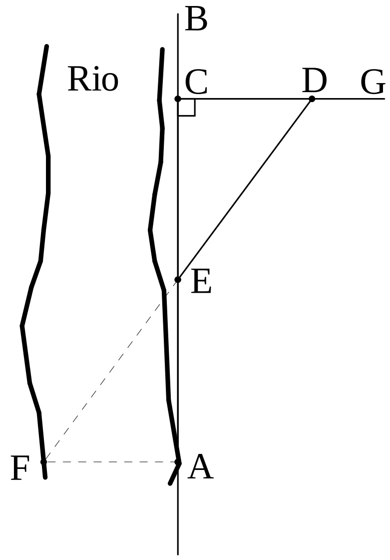
1. Considera o quadrilátero ABCD da figura em que E é o ponto de intersecção das suas diagonais. Sabe-se que $AE \equiv DE$ e $BE \equiv CE$.



1.1. Mostra que os triângulos ABE e DCE são congruentes.

1.2. Podemos afirmar que $AB \equiv CD$? Porquê?

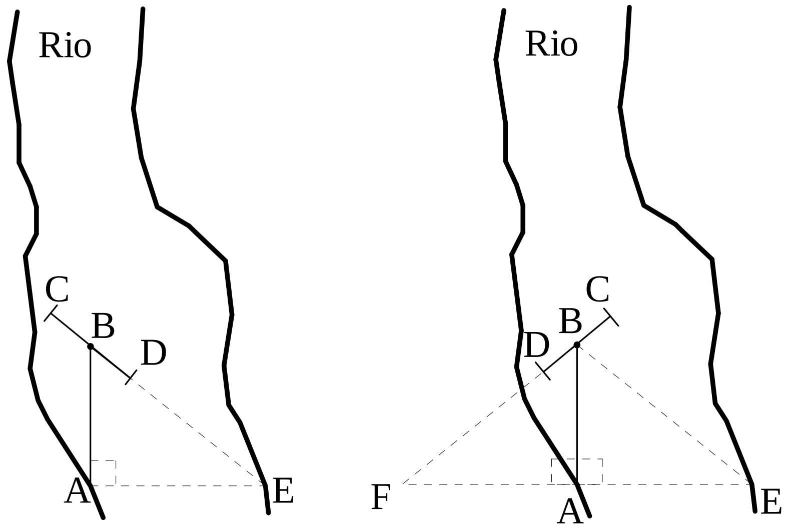
2. Um agrimensor romano (cerca de 180 d.C.) usou triângulos congruentes para determinar a largura de um rio numa determinada zona do seu leito. Começou por traçar uma recta AB ao longo da margem onde se encontrava. Num ponto C tirou uma perpendicular CG a AB. Colocou uma estaca no ponto médio, E, de AC. De A fixou um ponto F na outra margem, sendo AF perpendicular a AC. Finalmente, descobriu um ponto D a partir do qual observou os pontos E e F de modo que D, E e F estivessem sobre a mesma recta.



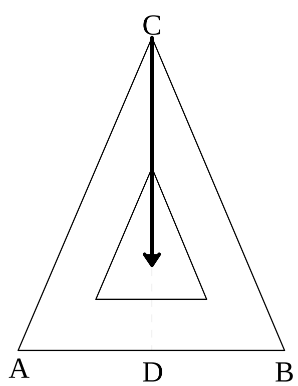
2.1. O agrimensor concluiu que os triângulos ECD e EAF são congruentes. Esta conclusão é correcta? Porquê?

2.2. A afirmação “A largura do rio na zona do ponto A é igual ao comprimento do segmento CD” é verdadeira ou falsa. Porquê?

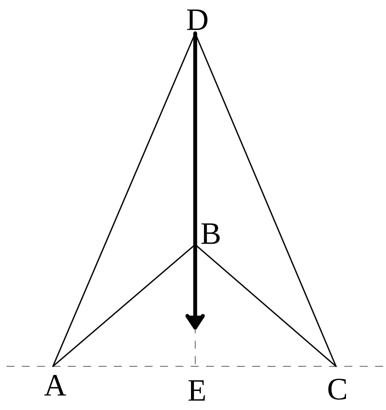
3. Num livro publicado em Veneza no séc. XVI menciona-se um método baseado na congruência de triângulos para calcular a largura de um rio num determinado troço. Inicialmente, fixa-se um dispositivo de observação no ponto A, perpendicularmente ao chão. Este dispositivo é constituído por um braço com duas miras (em C e D) que se pode mover em torno de B. Um observador mira a outra margem através de CD fixando um ponto E. Estabiliza-se o braço móvel segundo o ângulo obtido, ABE, e o dispositivo roda até o observador conseguir ver o ponto F. Conclui-se então que $AE \equiv AF$. Esta conclusão é correcta? Porquê?



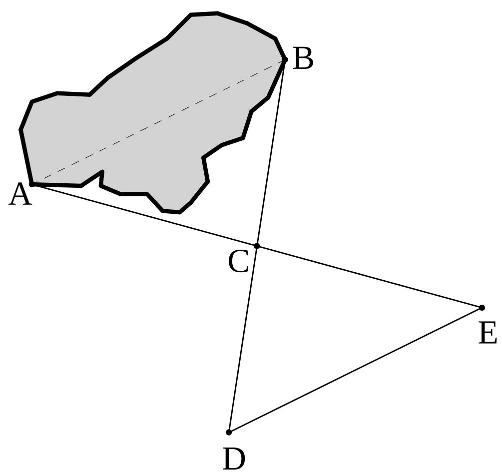
4. Os pedreiros usam uma ferramenta chamada fio-de-prumo. Os fios-de-prumo podem ter como suporte um triângulo isósceles. No triângulo ABC da figura $AC = BC$ e $AD = BD$. Do vértice C está suspenso um fio que oscila livremente e tem um peso de chumbo na outra extremidade. Quando o fio pára de oscilar, se o peso de chumbo apontar para o ponto D então $AB \perp CD$. Justifica esta conclusão.



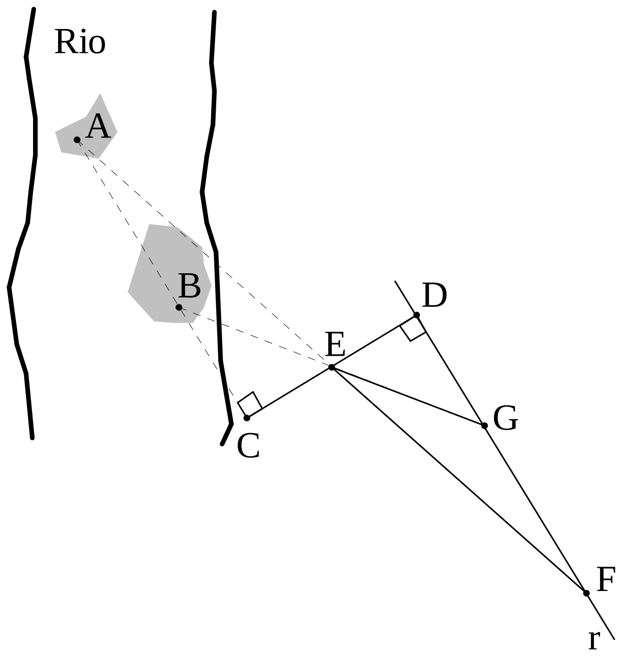
5. Um outro suporte para o fio-de-prumo consiste num quadrilátero ABCD. Do vértice D está suspenso um fio que oscila livremente com um peso de chumbo na outra extremidade. Que condições devem verificar-se para que, quando o fio pára de oscilar e coincide com BD, AC e DE sejam perpendiculares? Porquê?



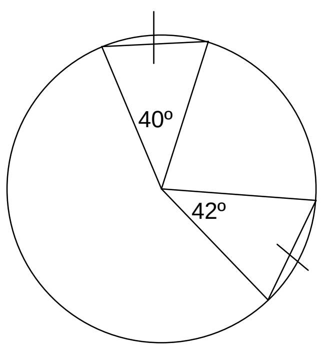
6. Pretende calcular-se a distância entre duas árvores situados à beira de um lago nos pontos A e B. Para tal, colocou-se uma estaca num ponto C e outra num ponto D de modo que os pontos B, C e D estão sobre a mesma recta e $CD \equiv BC$. Colocou-se uma outra estaca em E tal que A, C e E estão também sobre uma mesma recta e $AC \equiv CE$. Com esta construção, podemos concluir que a distância entre as árvores é igual ao comprimento do segmento DE? Justifica a tua resposta.



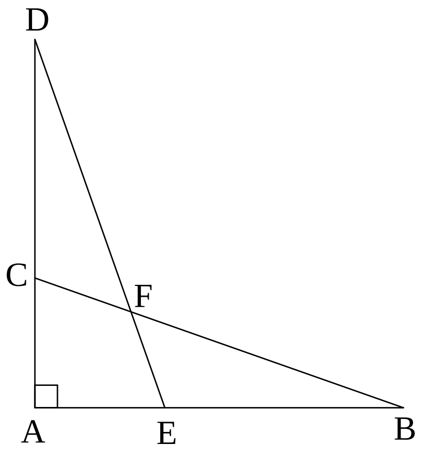
7. A e B são dois pontos situados em duas ilhotas fluviais. Pretende determinar-se a distância entre A e B. Fixa-se uma estaca em terra num certo ponto C colinear com A e B, à nossa escolha. Fixa-se outra estaca em D de tal modo que $AC \perp CD$. Tomamos o ponto médio do segmento de recta CD, que designamos por E. Traçamos uma recta r perpendicular a CD que passa por D. Finalmente, marcamos os pontos G e F que resultam da intersecção das rectas BE e AE com r, respectivamente. Então, GF representa a distância entre as ilhotas. Porquê?



8. Explica porque a figura seguinte é impossível.



9. Observa a figura em que $AB \perp AD$, $AB \equiv AD$, $DE \equiv BC$ e $\angle ADE \equiv \angle ABC$.

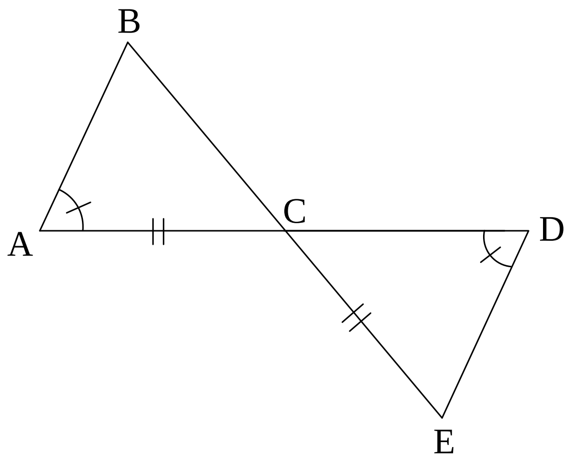


Indica, justificando:

9.1. Um triângulo congruente com ADE.

9.2. Um triângulo congruente com FDC.

10. Nas condições da figura, pode concluir-se que os triângulos ABC e DEC são congruentes? Porquê?



Tarefa 5 – Usando critérios de congruência

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem ser capazes de:

- Construir triângulos sendo dados o comprimento dos três lados, o comprimento de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado, ou o comprimento de um lado e a amplitude dos dois ângulos com esse lado comum;
- Utilizar relações entre elementos de um triângulo (lados, ângulos internos e ângulos externos) na resolução de problemas;
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Conhecer os critérios de congruência de triângulos LLL, LAL e ALA;
- Ser capazes de utilizar os critérios de congruência de triângulos na construção de triângulos, na resolução de problemas e na justificação de propriedades de figuras.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Identificarem os dados, as condições e o objectivo de um problema;
- Conceberem e porem em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
- Exprimirem processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. O professor começa por relembrar os critérios LLL, ALA e LAL de congruência de triângulos. Informa os alunos de que estes critérios podem ter aplicação tanto em situações matemáticas como em situações práticas. Em seguida os alunos resolvem a tarefa individualmente.

Não é necessário que os alunos resolvam todas as questões da tarefa. O professor pode optar por propor a resolução de algumas questões. Assim, os alunos podem resolver a questão 2. ou a 3., a questão 4. ou a 5., e a questão 6. ou a 7., consoante o professor considerar mais adequado em cada caso.

Os alunos devem ter cerca de 60 minutos do tempo total do bloco para resolver a tarefa, sendo o tempo restante usado para a introdução e para a síntese final. Enquanto os alunos resolvem a tarefa, o professor vai interagindo com eles para esclarecer dúvidas pontuais. Deve ser dada oportunidade aos alunos de apresentar as suas resoluções, estimulando-se, deste modo, que exprimam os processos e ideias matemáticos utilizados. Os comentários do professor e dos alunos a essas resoluções contribuem para clarificar questões de notação e vocabulário próprios deste tópico do programa. Na resolução dos problemas, os alunos devem ser encorajados e identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema, valorizando-se as diferentes estratégias de resolução bem como a verificação a adequação dos resultados.

Na síntese final, o professor sublinha a importância dos critérios de congruência de triângulos para resolver problemas. Pode recapitular ainda, em algumas questões que os alunos resolveram, os passos necessários para garantir a congruência de dois triângulos e como isso permite retirar as conclusões pretendidas.

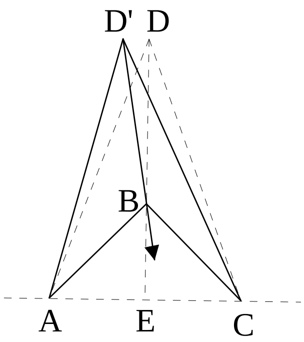
2. Exploração matemática. Na questão 1., é importante salientar que a congruência dos triângulos ABE e DCE (critério LAL) garante que todos os lados e ângulos homólogos são congruentes. Em particular, AB e CD são congruentes. O professor deve sublinhar que podemos garantir a congruência de ângulos e segmentos de recta homólogos a partir da congruência de triângulos correspondentes.

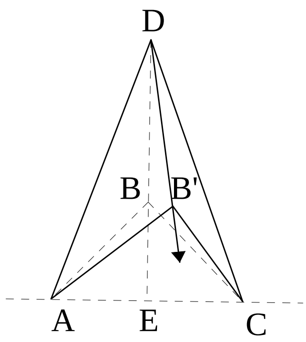
Na questão 2. é necessário assumir a horizontalidade do chão. O professor não precisa de o indicar logo no início da resolução, dando oportunidade aos alunos de assinalarem essa necessidade. No caso dos alunos não o fazerem espontaneamente, o professor deve indicar esta necessidade durante a discussão da resolução da tarefa. Os triângulos DCE e FAE são congruentes pelo critério ALA. De facto, CE e AE são congruentes porque E é o ponto médio de AC; os ângulos com vértices em C e A são rectos por construção; e os ângulos FEA e DEC são verticalmente opostos. Por conseguinte, AF e CD são congruentes.

Na questão 3., assumindo, novamente, a horizontalidade do chão, as condições do problema permitem concluir que os triângulos ABE e ABF são congruentes, pelo critério ALA. Na verdade, os ângulos ABE e ABF são congruentes, atendendo ao modo de funcionamento do dispositivo; AB é comum aos dois triângulos; e os ângulos BAE e BAF são rectos visto que o dispositivo é perpendicular ao chão. Logo, AE e AF são congruentes.

Na questão 4., da descrição do fio-de-prumo, concluímos que os triângulos ADC e BDC são congruentes pelo critério LLL. Logo, os ângulos ADC e BDC são congruentes. Como, além disso, são ângulos suplementares, são também rectos.

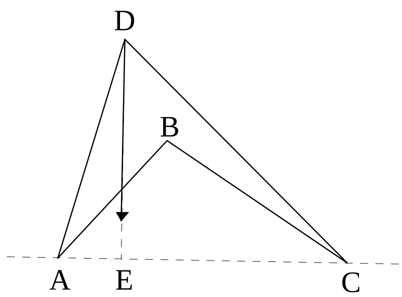
No fio-de-prumo a que se alude na questão 5. é necessário que os lados AD e CD do quadrilátero sejam congruentes assim como os lados AB e CB. Se AD e CD não forem congruentes, mesmo garantindo que AB e CB o são, como o fio-de-prumo em repouso coincide com BD, não é perpendicular ao chão. Ocorre uma situação análoga se AB e CB não forem congruentes mesmo que AD e CD o sejam. Estas situações estão ilustradas nas figuras seguintes:





Se AD e CD forem congruentes bem como AB e CB então, pelo critério LLL, os triângulos ABD e CBD são congruentes. O critério ALA (ângulos BAE e BCE; lados AB e CB; ângulos ABE e CBE) garante que os triângulos AEB e CEB também são congruentes. Logo, os ângulos homólogos AEB e CEB são congruentes e, sendo suplementares, são rectos.

Na prática, quando um fio suspenso numa das extremidades, com um chumbo na outra extremidade, pára de oscilar aponta para a perpendicular ao chão. No entanto, pode ser muito difícil demonstrar isso matematicamente em determinadas condições (veja-se, como exemplo, o ‘esquadro’ da figura seguinte).



Na questão 6., basta aplicar o critério LAL aos triângulos ACB e ECD. De facto, sendo C o ponto médio dos segmentos BD e AE (por construção), podemos garantir que os segmentos BC e DC são congruentes, assim como os segmentos AC e EC. Também os ângulos ACB e ECD são congruentes por serem verticalmente opostos.

Na questão 7., o critério ALA garante que os triângulos EDG e ECB são congruentes (os ângulos de vértices D e C são rectos, por construção; os lados ED e EC são congruentes porque E é o ponto médio de CD; os ângulos DEG e DEB são verticalmente opostos) assim como os triângulos EDF e ECA (os ângulos de vértices D e C são rectos, por construção; os lados ED e EC são congruentes porque E é o ponto médio de CD; os ângulos DEF e DEA são verticalmente opostos). Então, os segmentos EG e EB são congruentes bem como os segmentos EF e EA. Como os ângulos GEF e BEA são verticalmente opostos, pelo critério LAL os triângulos EGF e EBA são congruentes. Logo, GF e BA, lados homólogos nestes triângulos, também são congruentes.

A questão 8. permite uma demonstração por redução ao absurdo. De facto, se a figura for possível, pelo critério LLL os triângulos são congruentes. Logo, os ângulos identificados nos dois triângulos, por serem homólogos, são congruentes. Quer dizer, $42° = 40°$, o que é absurdo. O absurdo adveio de termos admitido que a figura é possível. Portanto, a figura não é possível. É conveniente sublinhar que esta maneira de raciocinar constitui um método de demonstração em Matemática que, em geral, pode ser esquematizado do seguinte modo:

Queremos demonstrar que uma propriedade P é válida;
Supomos que P não é válida;
Chegamos a um absurdo;
Então, P tem que ser válida.

Os triângulos ADE e ABC da questão 9. são congruentes (critério ALA). Donde se conclui que $AC \equiv AE$. Como, por hipótese, $AB \equiv AD$ concluímos que $CD \equiv EB$. Também sabemos que $\angle EFB \equiv \angle CFD$ (ângulos verticalmente opostos). Como, por hipótese, $\angle ADE \equiv \angle ABC$ concluímos que $\angle BEF \equiv \angle DCF$. Assim, pelo critério ALA, os triângulos FDC e FBE são congruentes.

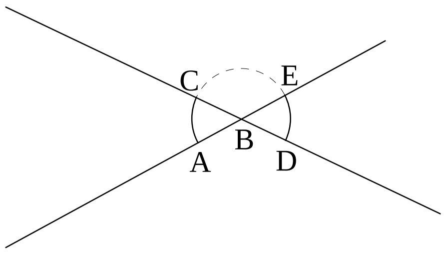
Os triângulos ABC e DEC da questão 10. não são necessariamente congruentes. O lado homólogo a AC é DC e acerca de DC não há qualquer informação.

3. Indicações suplementares. As questões 6. e 7. podem ser substituídas por questões análogas, em que os alunos tenham oportunidade de realizar construções auxiliares e medições no terreno (por exemplo, no pátio da escola).

Tarefa 6 – Elaborando demonstrações (PL)

No estudo da Geometria podemos formular conjecturas recorrendo a medições ou confiando nos nossos sentidos. No entanto, como as medições envolvem sempre erros e os nossos sentidos podem enganar-nos, para nos certificarmos de que essas conjecturas são verdadeiras temos de recorrer ao raciocínio matemático. Para isso, partimos de factos reconhecidos como verdadeiros e ligamo-los por meio de uma cadeia de afirmações logicamente verdadeiras. Para termos a certeza de que o raciocínio é válido, vamos registando as justificações dos vários passos efectuados até chegarmos à conclusão pretendida. Com este procedimento, estamos a fazer o que os matemáticos chamam 'demonstração matemática'.

Recorda o exemplo com que começámos esta aula: Demonstrar que *Ângulos verticalmente opostos são congruentes*. Vamos recorrer a uma figura para apoiar o raciocínio. Na figura seguinte, os ângulos ABC e DBE são verticalmente opostos. Vamos demonstrar que estes ângulos são congruentes usando somente raciocínio matemático.

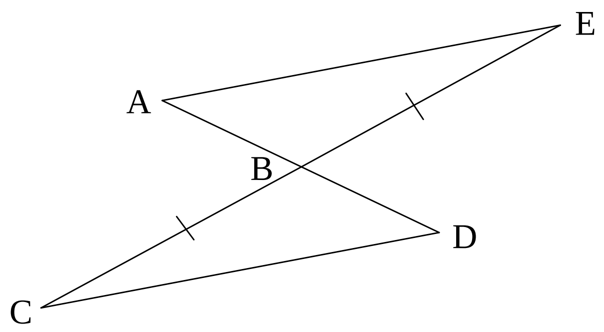


Podemos organizar a demonstração num esquema a duas colunas: na coluna da esquerda registamos os vários passos (as afirmações) e na da direita a respectiva justificação.

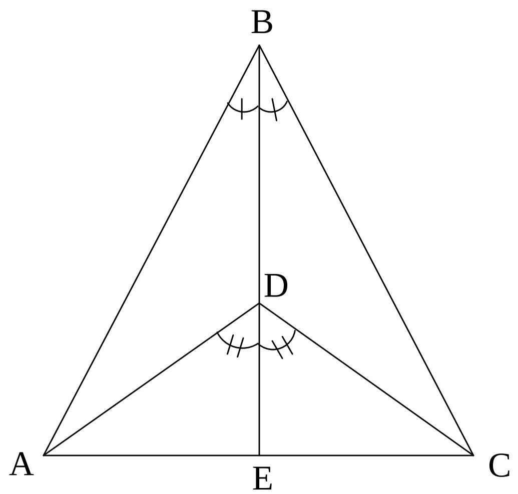
Passo	**Justificação**
Os ângulos ABC e CBE são suplementares	$\angle ABC + \angle CBE = 180^{o}$
Os ângulos DBE e EBC são suplementares	$\angle DBE + \angle CBE = 180^{o}$
$\angle ABC \equiv \angle DBE$	$\angle ABC + \angle CBE = \angle DBE + \angle CBE$

A seguir são-te propostas algumas questões em se pretende que uses raciocínio matemático de um modo semelhante ao anterior. Podes organizar as tuas ideias num esquema a duas colunas.

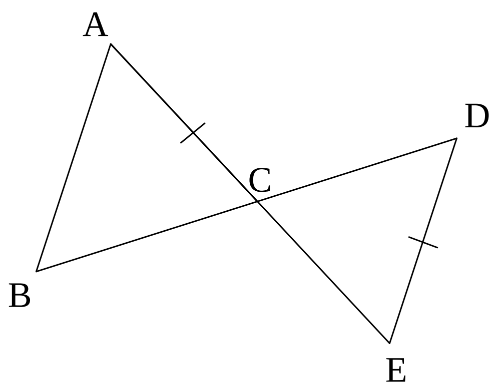
1. Os segmentos de recta AE e CD são paralelos e B é o ponto médio de CE. Mostra que os segmentos de recta AB e DB são congruentes.



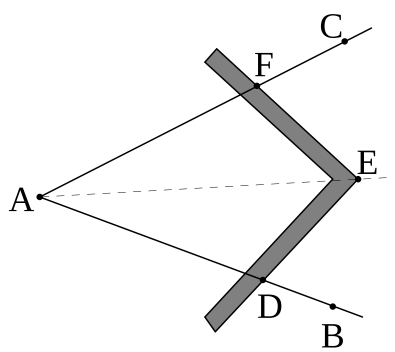
2. Nas condições da figura, mostra que os segmentos AD e CD são congruentes. Que outras congruências são válidas?



3. Sabendo que os segmentos de recta AB e DE são paralelos e que AC e DE são congruentes, mostra, se possível, que os triângulos BAC e DEC são congruentes.



4. Um esquadro de pedreiro é constituído por duas ‘réguas’ perpendiculares. Explica como se pode usar um esquadro de pedreiro para bissectar um ângulo. Demonstra que o teu procedimento é correcto.



Tarefa 6 – Elaborando demonstrações

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem:

- Utilizar relações entre elementos de um triângulo (lados, ângulos internos e ângulos externos) na resolução de problemas.
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos;
- Compreender os critérios de congruência de triângulos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, pretende-se que os alunos:

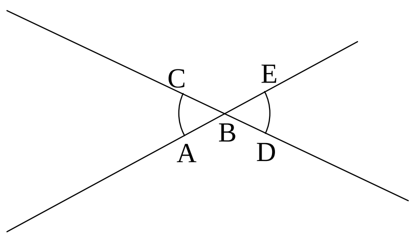
- Compreendam os significados de axioma, teorema e demonstração;
- Sejam capazes de utilizar critérios de congruência de triângulos na elaboração de demonstrações.

No âmbito das capacidades transversais esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Distinguirem uma argumentação informal de uma demonstração;
- Fazerem demonstrações simples;
- Identificarem os dados, as condições e o objectivo de um problema;
- Conceberem e porem em prática estratégias de resolução de problemas verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados.

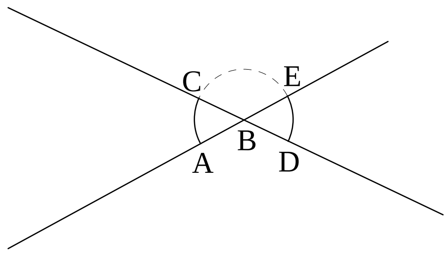
Orientações para o professor

1. Indicações gerais. O professor começa por questionar os alunos: *Como sabemos que ângulos verticalmente opostos são congruentes?* Recorrendo à figura, trata-se de demonstrar que $\angle ABC \equiv \angle DBE$.



Talvez alguns alunos refiram que as amplitudes dos ângulos em causa podem ser medidas e comparadas. Outros talvez afirmem: *Vê-se que os ângulos são iguais pela figura*. O professor sublinha que medições envolvem erros e que os nossos sentidos facilmente nos enganam. *Sendo assim, para termos a certeza de que uma certa propriedade é válida recorremos ao raciocínio matemático. No raciocínio matemático, usamos apenas propriedades que sabemos que são verdadeiras e as regras da lógica. Convém registarmos os raciocínios e a sua justificação em cada passo ou etapa, desde o início até à conclusão a que pretendemos chegar. Os matemáticos chamam a isto uma demonstração.*

Continua então o professor: *Vamos, então, demonstrar que ângulos verticalmente opostos são congruentes. Consideramos dois ângulos verticalmente opostos à nossa escolha. Queremos demonstrar que esses ângulos são congruentes. Podemos recorrer a uma figura como esta para nos ajudar a raciocinar.*



P: *Que ângulos são verticalmente opostos?*

A1: *Por exemplo, os ângulos ABC e DBE.*

A2: *Ou então, os ângulos ABD e CBE.*

P: *Exacto. Fixemos a nossa atenção nos ângulos ABC e DBE. O que pretendemos demonstrar?*

A3: *Que esses ângulos são congruentes.*

P: *Portanto, já sabemos de onde partimos (dois ângulos verticalmente opostos) e onde pretendemos chegar (esses ângulos são congruentes). Vamos organizar a nossa argumentação passo a passo tendo o cuidado de justificar todos os passos. Podemos fazer isso redigindo um pequeno texto ou usando um esquema a duas colunas.*

[professor preenche o quadro em interacção com os alunos]

Passo	**Justificação**
Os ângulos ABC e CBE são suplementares	$\angle ABC + \angle CBE = 180^{o}$
Os ângulos DBE e EBC são suplementares	$\angle DBE + \angle CBE = 180^{o}$
$\angle ABC \equiv \angle DBE$	$\angle ABC + \angle CBE = \angle DBE + \angle CBE$

P: *Se tivéssemos usado os outros ângulos verticalmente opostos (ou seja, ABD e CBE) poderíamos fazer o mesmo raciocínio?*

A4: *Sim, era igual.*

P: *E se tivéssemos usado outra figura e outros ângulos verticalmente opostos? Ainda poderíamos raciocinar da mesma maneira?*

A5: *Poderíamos. Porque entre dois ângulos verticalmente opostos está um ângulo que é suplementar desses dois e a lógica era a mesma.*

A seguir, o professor distribui pelos alunos o enunciado da tarefa. Esta tem quatro questões, em que se pretende que os alunos elaborem demonstrações breves usando os critérios de congruência. A introdução da tarefa recorda o início da aula e pode ser usada pelos alunos como apoio para a resolução das questões. Prevê-se que a resolução e a discussão da tarefa ocupem cerca de dois terços do tempo atribuído a esta tarefa.

Na síntese da tarefa o professor realça a diferença entre argumentos informais (por exemplo, apoiados em medições ou observação de figuras) e demonstrações matemáticas e recorda as principais estratégias de resolução de problemas usadas pelos alunos.

Para finalizar, após a discussão e síntese da tarefa, o professor pode referir-se à figura de Euclides e à sua obra *Elementos* (cerca de 300 a.C.) salientando que a maneira como este livro está organizado ainda é a seguida pelos matemáticos actuais. Os *Elementos* de Euclides têm uma organização axiomática, em que se assume que determinadas afirmações são verdadeiras (axiomas[3]) e a partir delas, usando as regras da lógica, demonstram-se outras afirmações (proposições).

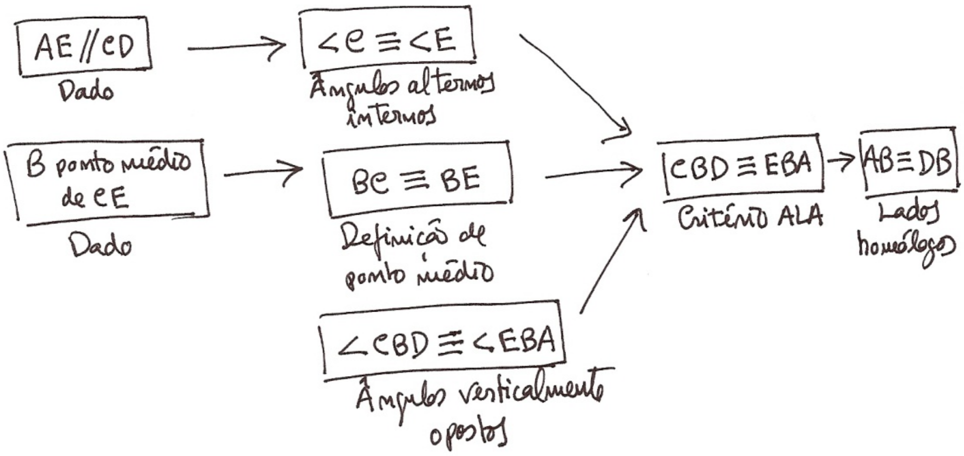
Em seguida, pode analisar-se brevemente a demonstração da primeira proposição desta obra: *Dado um segmento de recta, construir um triângulo equilátero que tenha o segmento como lado* (ver anexo). Este é um bom exemplo para realçar a distinção entre uma afirmação que necessita de ser demonstrada (a proposição em causa) e as afirmações tomadas como verdadeiras que Euclides invoca na sua demonstração (postulados 1 e 3 e noção comum 1).

O professor informa que os matemáticos continuam a designar como axiomas as afirmações que se aceitam sem demonstração e que muitas proposições, em virtude da sua importância, recebem o nome de ‘teoremas’.

[3] Na verdade, Euclides designa as afirmações que assume como verdadeiras como ‘postulados’ e ‘noções comuns’, enunciando cinco postulados e cinco noções comuns. Os postulados são afirmações de natureza geométrica que se aceitam sem demonstração. A palavra ‘postular’ significa ‘pedir para aceitar’. Portanto, Euclides pede aos seus leitores para aceitarem aquelas afirmações como pontos de partida para o desenvolvimento da sua teoria. As noções comuns, como o nome sugere, são afirmações aceites em geral e, por isso, para Euclides e para os seus leitores, a sua aceitação não constituía um obstáculo.

2. Exploração matemática. Ao elaborarem demonstrações, os alunos podem redigir um texto, elaborar um diagrama de fluxo (ou fluxograma[4]) ou organizar os vários passos e respectivas justificações da demonstração em duas colunas.

A demonstração associada à questão 1. organiza-se no seguinte fluxograma:



Organizando esta demonstração em duas colunas temos:

Passo	**Justificação**
$AE//CD$	Por hipótese
$\angle DCB \equiv \angle AEB$	Ângulos alternos internos
$BC \equiv BE$	B é ponto médio de CE (por hipótese)
$\angle CBD \equiv \angle EBA$	Ângulos verticalmente opostos
$CBD \equiv EBA$	Critério ALA
$AB \equiv DB$	Lados homólogos de triângulos congruentes

No caso da demonstração da questão 2, basta mostrar que os triângulos ABD e CBD são congruentes. Por hipótese, os ângulos ABD e CBD são congruentes. O lado BD é comum aos dois triângulos. Os ângulos ADB e CDB são congruentes (são ângulos suplementares de dois ângulos congruentes, nomeadamente, os ângulos ADE e CDE).

[4] Do inglês ‘flowchart’. Segundo o Webster’s Comprehensive Dictionary of the English Language (Trident Press International), *flowchart* é um “diagrama que mostra todos os passos numa sequência lógica tal como num programa de computador”.

Logo, pelo critério ALA os triângulos ABD e CBD são congruentes. Desta congruência concluímos que os segmentos AB e BC, bem como AD e CD, são congruentes; também os ângulos BAD e BCD são congruentes. Mas como AB e BC são congruentes, o triângulo ABC é isósceles. Logo, os ângulos da base (BAC e BCA) são congruentes. Como BAC é a soma de BAD e DAE, e BCA a soma de BCD e DCE, temos que DAE e DCE são congruentes. Por ALA, os triângulos ADE e CDE são congruentes. Donde, os segmentos AE e CE são congruentes tal como os ângulos AED e CED (AED e CED são ângulos rectos porque são suplementares e congruentes).

Os alunos devem ser confrontados com situações em que não seja possível usar critérios de congruência, como na questão 3. De facto, como, por hipótese, AB e DE são paralelos, concluímos que $\angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{E}$ e $\angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{D}$. No entanto, os lados congruentes AC e DE, não são homólogos. Logo, não há informação suficiente para se concluir que $\mathrm{BAC} \equiv \mathrm{DEC}$.

Na questão 4., o esquadro de pedreiro deve colocar-se de modo que os segmentos AD e AF, bem como EF e ED sejam congruentes. Assim, a bissectriz do ângulo BAC é a semi-recta AE. De facto, pelo critério LLL, os triângulos AEF e AED são congruentes. Donde se conclui que os ângulos FAE e DAE são congruentes.

3. Indicações suplementares. No caso da congruência de triângulos é frequente assumir--se que o critério LAL é um axioma. Assumir LAL como axioma, intuitivamente, significa assumir que o triângulo mantém a sua forma e a dimensão dos seus lados ao ser deslocado no plano.

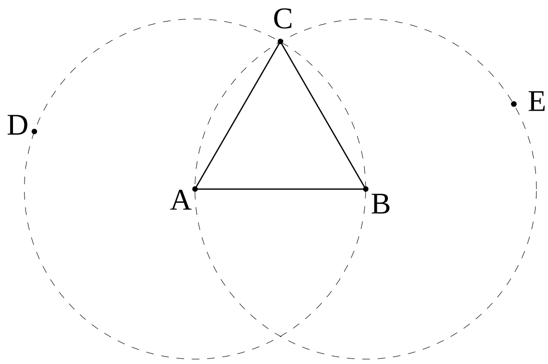
Por que razão assumir LAL como axioma? Nos *Elementos*, Euclides apresenta uma demonstração do critério LAL (proposição 4 do livro I). A ideia da demonstração assenta no deslocamento de um dos triângulos até se sobrepor ao outro. No entanto, os pressupostos de Euclides não lhe permitem justificar que o triângulo depois de deslocado permanece inalterado. Para evitar este embaraço, nas versões modernas da geometria euclidiana, após a revisão que Hilbert efectuou em 1899, frequentemente considera-se o critério de congruência LAL um axioma[5].

[5] Ver, por exemplo, Oliveira (1995, pp. 33-34 e 166) e Araújo (1998, p. 20).

Anexo

Proposição I.1 dos *Elementos* de Euclides. *Dado um segmento de recta, construir um triângulo equilátero que tenha o segmento como lado.*

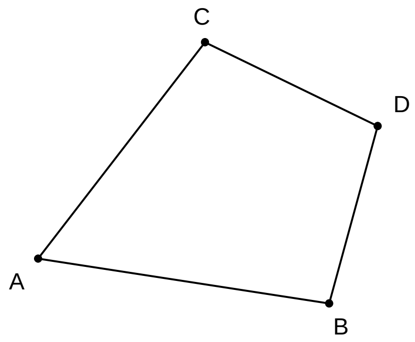
Esboço de demonstração. Consideremos um segmento de recta de extremos A e B. Pretende construir-se um triângulo equilátero em que a medida dos seus lados seja igual à medida do segmento de que partimos. Com centro em A e raio AB construamos a circunferência BCD. Novamente, com centro em B e raio BA construamos a circunferên-



cia ACE. As circunferências intersectam-se num ponto que designamos por C. Construamos os segmentos de recta CA e CB. Como A é o centro da circunferência CDB, os segmentos AC e AB são congruentes; do mesmo modo, como B é o centro da circunferência CAE, os segmentos BC e BA são congruentes. Logo, os segmentos CA, AB e BC são congruentes entre si e o triângulo é equilátero.

Tarefa 7A – Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos (PL)

1. Mede as amplitudes as ângulos internos do quadrilátero que te foi entregue e adiciona as medidas obtidas. E regista os valores obtidos na tabela seguinte, bem como o dos outros grupos.



	∠ ACD	∠ CDB	∠ DBA	∠ BAC	Soma das amplitudes
O meu grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					
Grupo					

1.1. Escreve uma conjectura sobre o que observas na última coluna.

1.2. Procura demonstrar a tua conjectura. Para isso desenha uma das diagonais do quadrilátero.

2. Desenha no teu caderno um paralelogramo e um rectângulo.

2.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do paralelogramo, compara-as e escreve uma conjectura sobre o que observas.

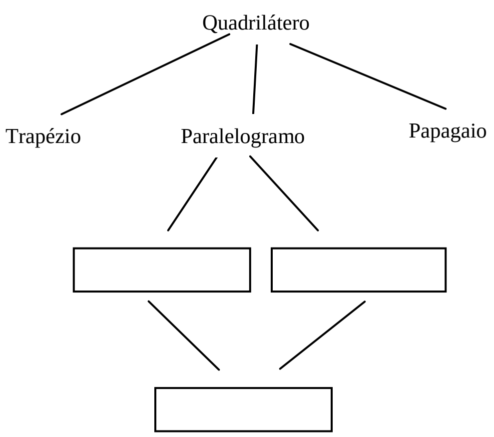
2.2. O rectângulo também verifica a conjectura que formulaste em 2.1. Procurara encontrar uma justificação para esse facto.

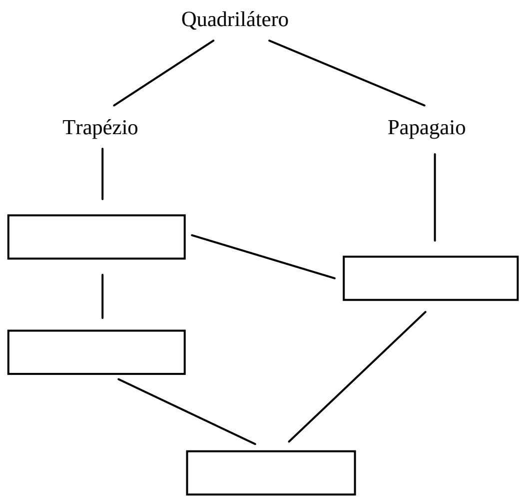
3. Para responder às seguintes questões considera, os seguintes quadriláteros: paralelogramo, rectângulo, papagaio, quadrado, losango e trapézio (isósceles e escaleno).

3.1. Quais são as características que cada um destes quadriláteros tem que o torna único? (Começa por medir os lados e os ângulos de cada um e compará-los...).

3.2. Constrói as diagonais dos quadriláteros anteriores e descreve as suas propriedades. (Começa por desenhar um esquema de cada um dos quadriláteros e das suas diagonais, para encontrar relações entre elas).

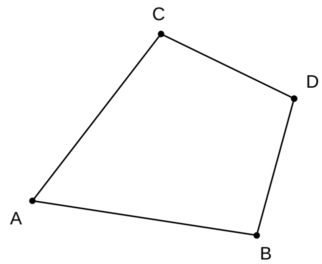
3.3. Tendo em atenção as características dos quadriláteros, é possível estabelecer hierarquias entre eles. Considera os esquemas seguintes e completa-os, justificando as ligações entre os quadriláteros.





Tarefa 7B – Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos (AGD)

1. Constrói um quadrilátero. Mede as amplitudes dos seus ângulos internos e adiciona as medidas obtidas.



1.1. Arrasta um vértice qualquer de modo a obter um novo quadrilátero. Verifica o que passa com as amplitudes dos ângulos e com a respectiva soma. Escreve uma conjectura sobre o que observas.

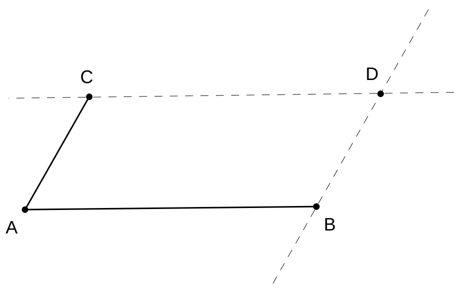
1.2. Procura demonstrar a tua conjectura. Para isso desenha uma das diagonais do quadrilátero.

2. Constrói um paralelogramo e um rectângulo de tal forma que quando se arrastar qualquer um dos seus vértices estes quadriláteros mantenham a sua forma. Para isso segue as instruções seguintes.

Segue as seguintes instruções para construir um paralelogramo. Constrói:

- os segmentos AB e AC;
- a recta paralela a AB e que passa pelo ponto C;
- a recta paralela a AC e que passa pelo ponto B;
- o segmento AC.

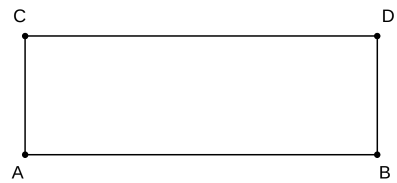
Esconde as rectas e constrói os segmentos BD e CD.



Segue as seguintes instruções para construir um rectângulo. Constrói:

- o segmento AB;
- a recta perpendicular a AB no ponto A;
- na recta anterior marca o ponto C;
- o segmento AC.

Acaba de construir o rectângulo ABCD.



Mede as amplitudes dos ângulos internos do paralelogramo e do rectângulo.

2.1. Arrasta o vértice A de modo a obter um novo paralelogramo. Compara as amplitudes dos ângulos e escreve uma conjectura sobre o que observas.

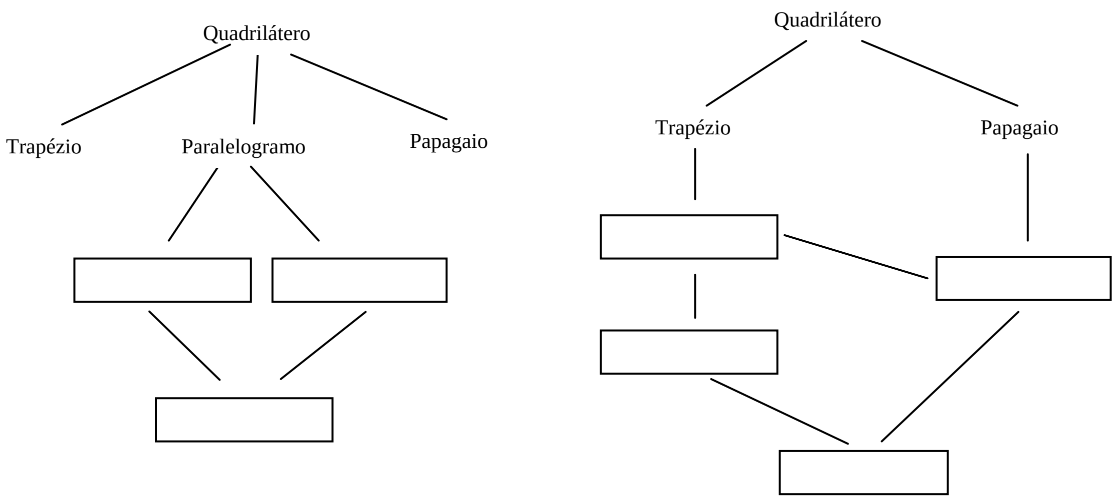
2.2. O rectângulo também verifica a conjectura que formulaste em 2.1. Procurara encontrar uma justificação para esse facto.

3. Para responder às seguintes perguntas considera, para além do paralelogramo e do rectângulo, o quadrado, o trapézio, o losango e o papagaio.

3.1. Quais são as características que cada um destes quadriláteros tem que o torna único? (Começa por medir os lados e os ângulos de cada um e compará-los...)

3.2. Constrói as diagonais dos quadriláteros anteriores e descreve as suas propriedades. (Começa por desenhar um esquema de cada um dos quadriláteros e das suas diagonais, para encontrar relações entre elas).

3.3. Tendo em atenção as características dos quadriláteros, é possível estabelecer hierarquias entre eles. Considera os esquemas seguintes e completa-os, justificando as ligações entre os quadriláteros.



Tarefa 7 – Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos.

Possíveis aprendizagens dos alunos

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Determinar a soma dos ângulos internos de um quadrilátero;
- Classificar quadriláteros, construí-los a partir de condições dadas e investigar as suas propriedades;

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Compreenderem o papel das definições em Matemática;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa foi concebida para fazer a transição do estudo dos triângulos para o estudo dos quadriláteros. O professor deve fornecer um quadrilátero com dimensões apropriadas.

Se o professor optar por utilizar um AGD, pode fornecer aos alunos os quadriláteros (paralelogramo, rectângulo, quadrado, trapézio, losango e papagaio) já construídos no ambiente de geometria dinâmica, para facilitar a resolução da questão 3.

Sugere-se ao professor que organize a aula de modo a reservar um momento final de discussão das respostas com toda a turma. Outra possibilidade é organizar a aula de modo a incluir um momento de discussão com todos os alunos no final de cada questão. A utilização de diagramas e de tabelas pode ser um pretexto para que saliente que além das figuras geométricas, da linguagem verbal (oral e escrita) e da linguagem simbólica convencional, podemos usar ainda outras representações para a informação, as ideias e os conceitos geométricos.

Na síntese final, o professor dá relevo aos resultados matemáticos obtidos (a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º; a amplitude dos ângulos internos opostos de um paralelogramo são iguais; o rectângulo também respeita a propriedade anterior, uma vez que também é um paralelogramo). Deve ainda salientar que, partindo de definições ou características diferentes, podemos organizar de duas maneiras diferentes os quadriláteros, bem como as relações entre eles.

2. Algumas explorações. Nesta tarefa os alunos vão utilizar o transferidor para medir os ângulos internos. Também se pretende que os alunos investiguem algumas das propriedades dos seus ângulos e diagonais.

Se a opção recair na utilização de um AGD, os alunos vão construir alguns quadriláteros de modo a que estes não se alterem por arrastamento de um dos seus vértices e, assim, mantenham as suas características. Só desta forma será possível redigir conjecturas que façam sentido.

A questão 1. foca a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero e pretende-se que os alunos demonstrem que essa soma é 360º. Isso é conseguido dividindo-se o quadrilátero com uma das suas diagonais, de modo a formar dois triângulos cuja soma das amplitudes dos ângulos internos é 360º.

A questão 2. guia os alunos na construção de dois quadriláteros especiais, o paralelogramo e o rectângulo. Nesta questão pretende-se que os alunos ao medirem os ângulos internos do paralelogramo verifiquem que os ângulos opostos são iguais.

Num AGD, o paralelogramo e rectângulo construído de acordo com as instruções da tarefa permite que quando um dos seus vértices é arrastado, se mantenha a sua forma e, como tal, as suas propriedades.

Ainda, em 2.2. pretende-se que os alunos justifiquem que o rectângulo também respeita a característica anterior. Ao discutir-se esta questão com todos os alunos, pode existir um momento cujo foco seja o porquê de se poder considerar o rectângulo como sendo um caso particular do paralelogramo.

A questão 3. é a mais longa e exigente da tarefa, mas também a que mais contribui para uma verdadeira compreensão das diferenças, semelhanças e relações entre os quadriláteros. Na pergunta 3.1. pretende-se que os alunos realizem uma pequena investigação sobre o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos internos de cada um dos quadriláteros indicados. A tabela seguinte resume essas características.

Quadrilátero	Ângulos	Lados
Paralelogramo	Ângulos opostos iguais	Paralelos e iguais dois a dois
Rectângulo	Ângulos iguais (90º)	Paralelos e iguais dois a dois
Quadrado	Ângulos iguais (90º)	Paralelos e iguais
Losango	Ângulos opostos iguais	Paralelos e iguais
Papagaio	Um par de ângulos opostos iguais	Pares de lados consecutivos iguais
Trapézio isósceles	Um par de ângulos consecutivos iguais	Um par de lados paralelos Um par de lados não paralelos iguais
Trapézio escaleno	Todos os ângulos diferentes	Um par de lados paralelos Todos os lados diferentes
Trapézio rectângulo	Um par de ângulos rectos consecutivos	Um par de lados paralelos Um par de lados iguais ou todos os lados diferentes

O objectivo da pergunta 3.2. é estudar as diagonais dos quadriláteros tendo em conta o seu comprimento, a forma como se intersectam e a existência de perpendicularidade. Na tabela seguinte encontra-se um resumo dessas características.

Quadrilátero	Diagonais
Paralelogramo	Dividem-se ao meio
Rectângulo	Iguais e dividem-se ao meio.
Quadrado	Iguais; perpendiculares e dividem-se ao meio
Losango	Perpendiculares e dividem-se ao meio
Papagaio	Perpendiculares e só uma é dividida ao meio
Trapézio isósceles	Iguais

Com as características estudadas é possível organizar os vários quadriláteros estudados, sendo este o objectivo da pergunta 3.3. São utilizadas duas organizações possíveis em esquema. No primeiro esquema, a separação no primeiro nível tem por base o número de lados paralelos. No segundo nível, losango e rectângulo, diferenciam-se porque o primeiro tem os lados todos iguais, enquanto o rectângulo tem todos os ângulos rectos. No último nível surge o quadrado. Na tabela seguinte está um resumo do preenchimento e respectivas justificações do preenchimento do primeiro esquema.

Quadrilátero	Justificação
Trapézios	Um par de lados paralelos
Paralelogramo	Dois pares de lados paralelos
Losango	Todos os lados iguais
Rectângulo	Ângulos rectos
Quadrado	Dois pares de lados paralelos, iguais e ângulos rectos
Papagaio	Nenhum par de lados paralelos

O segundo esquema é organizado tendo em conta as características dos lados dos quadriláteros, paralelismo e comprimento. Começa-se por dividir o esquema em trapézio e papagaio. Segue-se ao papagaio, o paralelogramo, rectângulo e quadrado. Para completar o esquema falta o papagaio e deste surge o losango.

Quadrilátero	Justificação
Trapézio	Um par de lados paralelos
Paralelogramo	Dois pares de lados paralelos
Rectângulo	Dois pares de lados paralelos e iguais dois a dois
Quadrado	Dois pares de lados paralelos e todos iguais
Papagaio	Dois pares de lados consecutivos iguais
Losango	Lados todos iguais

3. Indicações suplementares. Uma possibilidade para continuar esta tarefa é propor aos alunos a elaboração de um outro esquema que relacione os quadriláteros, justificando as várias divisões e relações que existam. A discussão destes esquemas pode ser uma boa oportunidade para desenvolver a capacidade de argumentação matemática dos alunos.

Explorações de alunos

A tarefa na qual se utiliza um AGD foi experimentada com alunos numa sala de informática em que os alunos trabalharam em par. A ideia de fornecer alguns dos quadriláteros já construídos surgiu desta primeira utilização, por se verificar que facilitaria a conclusão da tarefa em apenas um bloco de aulas.

A ilustração seguinte mostra o que um grupo de alunas escreveu ao realizar a tarefa num AGD. Algumas das questões tinham à data da recolha destes dados algumas diferenças das que são aqui são apresentadas.

Na primeira questão da tarefa as alunas apresentaram a seguinte conjectura que demonstraram seguindo a sugestão de construir uma das diagonais.

A soma de ângulos internos num quadrilatero
é sempre 360°.

Ao desenharmos a diagonal obtemos 2 triângulos, vi
que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180
então a soma dos dois triângulos é 360°.

A dificuldade de outro grupo de alunos nesta primeira questão prendeu-se com o facto de não terem somado um dos ângulos, o que só foi ultrapassado com a ajuda do professor:

Leonel: *Stor chegue aqui.*

Prof.: *O que se passa?*

Paulo: *Calculámos a soma mas não dá nada.*

Prof.: *Não dá nada?*

Paulo: *Sim! Não dá sempre o mesmo valor. Não é sempre igual a alguma coisa.*

Prof.: *Como fizeram?*

Paulo: *Somámos os ângulos.*

Prof.: *Quantos ângulos internos tem o quadrilátero?*

Leonel: *Tem quatro.*

Prof.: *Quantos somaram?*

Leonel: *Três! Falta somar um.* [Depois de fazerem a soma correcta e arrastarem um dos pontos.]

Leonel: *A soma dá 360º!*

Depois, para encontrarem uma demonstração também existiu a necessidade da intervenção do professor.

Leonel: *Como se faz a diagonal?*

Paulo: *Desenha assim...* [Paulo desenhou uma das diagonais com o rato]

Leonel: *E agora?*

Paulo: *Não sei!*

Prof.: *Que figuras obtiveram?*

Paulo: *Dois triângulos.*

Prof.: *O que pretendem provar?*

Paulo: *Que a soma dá 360º.*

Prof.: E *o que se passa com a soma dos ângulos internos de um triângulo?*

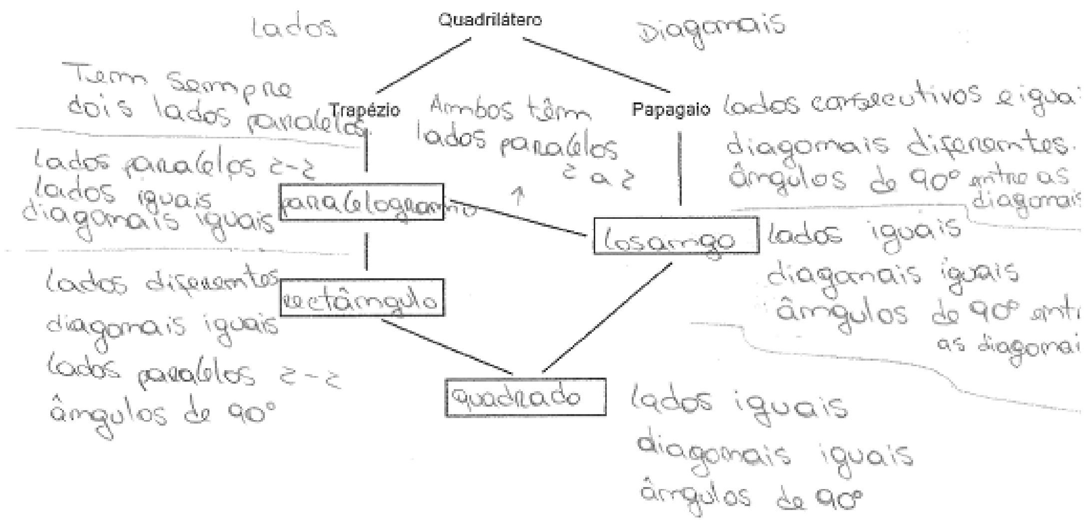
Leonel: *Dá 180º!*

Paulo: *Então, como são dois tem que dar 360º.*

Prof.: *É isso! Escrevam o que acabaram de dizer.*

Existiu a necessidade de o professor relembrar "O que pretendem provar?". Essa foi a fala decisiva para ultrapassar a dificuldade dos alunos.

Na última questão da tarefa o grupo das alunas preencheu o único esquema que era apresentado, justificando utilizando as características que tinham identificado nas questões anteriores.

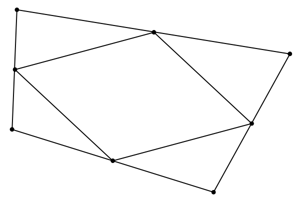


As alunas tentaram utilizar toda as características que tinham encontrado nas questões anteriores. Aqui a discussão geral com os alunos é decisiva para que os alunos percebam o que é essencial para se passar de um nível do esquema para o seguinte. Neste caso bastava terem utilizado as características dos lados para completarem o esquema.

Tarefa 8 – Investigando quadriláteros e pontos médios (AGD)

1. Constrói um quadrilátero à tua escolha e marca os pontos médios dos seus lados. Une os pontos médios de lados consecutivos. Que quadrilátero obtiveste?

2. Investiga o que se passa se o quadrilátero inicial for um quadrado, um losango, um paralelogramo …



3. Escreve as tuas conjecturas e tenta justificá-las elaborando para tal um relatório de acordo com o guião seguinte.

Guião para a elaboração de um relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve uma situação, analisando-a e criticando-a. Pretende-se que no relatório refiram não apenas as conclusões a que chegaram mas todos os procedimentos utilizados para chegar a essas conclusões.

Na elaboração do relatório deves ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

- Identificação do aluno ou grupo de alunos
- Título do trabalho e data da entrega
- Objectivo do trabalho incluindo as questões levantadas
- Descrição do processo de investigação, incluindo esboços de figuras ou esquemas das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas
- Conclusões e respectiva justificação sintética
- Apreciação da tua intervenção no trabalho
- Bibliografia consultada, caso exista

Sugestões para a elaboração do relatório:

- Tirar apontamentos detalhados durante a realização das tarefas
- Mais importante do que as conclusões a que chegaram é o processo que utilizaram para lá chegar, incluindo os erros que cometeram em termos de conjecturas e o modo como os ultrapassaram
- No final deve ser incluído um pequeno resumo das conclusões

Tarefa 8 – Investigando quadriláteros e pontos médios

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos;
- Classificar quadriláteros e construí-los a partir de condições dadas.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Investigar as propriedades de quadriláteros.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

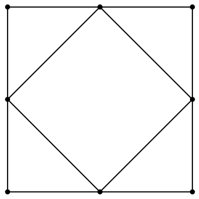
- Exprimirem resultados, ideias e processos matemáticos por escrito, utilizando vocabulário próprio.

Orientações para o professor

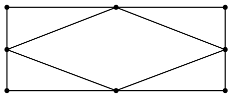
1. Indicações gerais. Esta tarefa constitui uma investigação em que é pedido aos alunos que redijam um relatório, de modo a desenvolverem a sua capacidade de comunicação matemática, neste caso, a capacidade de comunicação escrita. A tarefa mobiliza conhecimentos anteriores, sem envolver novos conceitos matemáticos, e apenas deve ser utilizada num ambiente de geometria dinâmica.

Caso os alunos já tenham construído quadriláteros em tarefas anteriores utilizando um AGD, podem utilizá-los no desenvolvimento da sua investigação. Se isso não aconteceu, o professor poderá fornecer os quadriláteros já construídos no ambiente de geometria dinâmica que estiver a utilizar.

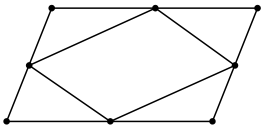
2. Exploração matemática. Seguidamente apresenta-se uma breve discussão acerca do quadrilátero que se obtém ao unir os pontos médios de lados consecutivos de vários quadriláteros.



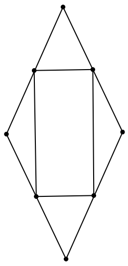
A união dos pontos médios de lados consecutivos do **quadrado** origina um novo **quadrado**. Porquê?
-O paralelismo dos lados do novo quadrado resulta do facto de serem paralelos dois a dois com cada uma das diagonais do quadrado original.
-A perpendicularidade dos lados no novo quadrado resulta do facto das diagonais do quadrado original serem perpendiculares.
-A igualdade do comprimento dos lados resulta do facto de se unirem pontos médios de um quadrado.



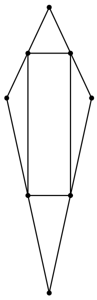
A união dos pontos médios de lados consecutivos do **rectângulo** origina um **paralelogramo**. Porquê?
-O paralelismo dos lados do paralelogramo resulta do facto destes serem paralelos dois a dois com cada uma das diagonais do rectângulo original.



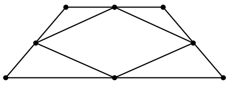
A união dos pontos médios de lados consecutivos do **paralelogramo** origina um novo **paralelogramo**. Porquê?
-O paralelismo dos lados do novo paralelogramo resulta do facto destes serem paralelos dois a dois com cada uma das diagonais do paralelogramo original.



A união dos pontos médios de lados consecutivos do **losango** origina um **rectângulo**. Porquê?
-O paralelismo dos lados do rectângulo resulta do facto destes serem paralelos dois a dois com cada uma das diagonais do losango original.
-A perpendicularidade dos lados do rectângulo resulta do facto das diagonais do losango original também serem perpendiculares.



A união dos pontos médios de lados consecutivos do **papagaio** origina um **rectângulo**. Porquê?
-O paralelismo dos lados do rectângulo resulta do facto destes serem paralelos dois a dois com cada uma das diagonais do papagaio original.
-A perpendicularidade dos lados do rectângulo resulta do facto das diagonais do papagaio original também serem perpendiculares.

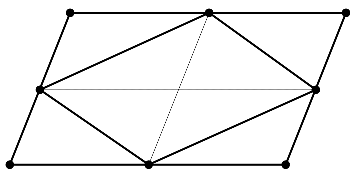


A união dos pontos médios de lados consecutivos do que qualquer um **trapézio** origina um **paralelogramo**. Porquê?
-O paralelismo dos lados do paralelogramo resulta do facto de serem paralelos dois a dois com cada uma das diagonais do trapézio original.

3. Indicações suplementares. Alguns alunos gostam de prolongar as suas explorações de modo a melhorarem o seu trabalho. O professor pode sugerir que os alunos investiguem o que acontece se unirem os pontos médios de outras figuras: triângulos, pentágonos, hexágonos, etc.

Esta tarefa baseia-se no Teorema de Varignon: “A união dos pontos médios dos lados consecutivos de qualquer quadrilátero forma um paralelogramo. Se os lados do quadrilátero não se cruzarem, então a área do paralelogramo é metade da área do quadrilátero” (Coxeter, 1967). Pierre Varignon (1654-1722), matemático francês, publicou este teorema pela primeira vez em 1731.

Caso os alunos finalizem o relatório antes do final da aula, o professor pode propor-lhes que investiguem o que se passa com a área dos dois quadriláteros, o original e o que resulta da união dos pontos médios do quadrilátero inicial. Como o AGD permite calcular rapidamente as respectivas áreas, os alunos concluem sem dificuldade que ambas são iguais. Pode de seguida propor-lhes que demonstrem esse facto. No caso de os quadriláteros originais terem pelo menos um eixo de simetria isso é uma tarefa simples. No caso do paralelogramo é mais complexo. Uma boa estratégia é dividi-lo segundo as diagonais do paralelogramo resultante, conforme mostra a figura seguinte.



Explorações de alunos

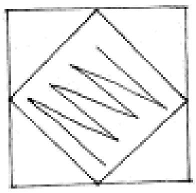
Esta tarefa foi utilizada numa turma, tendo sido fornecido aos alunos o guião de relatório apresentado nesta tarefa. Os alunos trabalharam em pares. Quando surgiam dificuldades, o professor foi orientando os alunos com questões do tipo: “Já consideraram outros quadriláteros?”; “E os trapézios?”; “Que tipo de conclusões podem tirar?”

Apresenta-se de seguida o relatório elaborado por duas alunas, que iniciaram a sua investigação pelo quadrado e seguiram-se: losango, papagaio, paralelogramo, rectângulo trapézio isósceles, trapézio rectângulo e trapézio escaleno. No seu relatório, as alunas foram conjecturando sobre os quadriláteros que surgiam quando uniam os pontos médios de lados consecutivos dos quadriláteros originais e basearam as suas justificações nas propriedades de cada um dos quadriláteros que iam surgindo dessa união.

INVESTIGANDO QUADRILÁTEROS E PONTOS MÉDIOS

Este relatório tem como objectivo marcar os pontos médios dos lados dos quadriláteros e uni-los entre si em lados consecutivos.

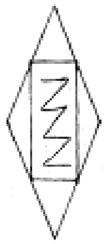
Começámos por investigar o quadrado. Verificámos que unindo os pontos médios de lados consecutivos dava origem a outro quadrado, este mais pequeno que o primeiro.



Justificação:

Isto verificou-se porque o quadrado tem os lados todos iguais e todos os ângulos de 90°. Para chegarmos a esta conclusão, medimos os lados e os ângulos. Dando, os lados 2,90 cm cada e os ângulos 90° cada.

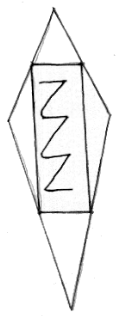
Depois investigámos o losango. Vimos que unindo os pontos médios de lados consecutivos dava origem a um rectângulo.



Justificação:

Isto verificou-se porque o rectângulo tem pares de lados paralelos e todos os ângulos de 90°. Para chegarmos a esta conclusão, medimos os lados e os ângulos. Dando, dois lados de 2,42 cm e outros dois de 0,92 cm e os ângulos 90° cada.

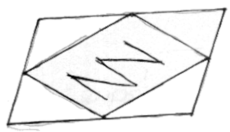
De seguida investigamos o papagaio. Vimos que uni os pontos médios de lados consecutivos dava origem a um rec
gulo. ~~Sendo este mais pequeno que o outro.~~



Justificação:

Isto verificou-se porque o rectângulo tem pares de lados paralelos e todos os ângulos de 90°. Para chegarmos a esta conclusão, medimos os lados e os ângulos. Dando, dois lados de 2,95 cm e outros dois de 0,99 cm e os ângulos 90° cada.

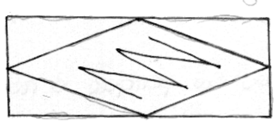
Depois investigámos o paralelogramo. Vimos que unindo os pontos médios de lados consecutivos dava origem a um rectângulo.



Justificação:

Isto verificou-se porque o rectângulo tem pares de lados paralelos e todos os ângulos de 90°. Para chegarmos a esta conclusão, medimos os lados e os ângulos. Dando, dois lados de 1,73 cm e outros dois de 2,42 cm e os ângulos 90° cada.

A próxima figura a investigarmos foi o rectângulo. Verificámos que unindo os pontos médios de lados consecutivos dava origem a um losango.

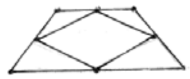


Justificação:

Isto verificou-se porque o losango tem todos os lados iguais e ângulos opostos iguais dois a dois. Para chegamos a esta conclusão, medimos os lados e os ângulos. Dando, 2,74 cm cada lado e 41,24° dois ângulos e 138,76° outros dois ângulos.

..s investigámos o trapézio isósceles. Concluímos que unindo pontos médios de lados consecutivos obtíamos um losango.

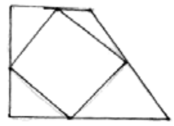
Justificação:



Isto verificou-se porque o losango tem todos os lados iguais e ângulo opostos iguais dois a dois. Para chega mos a esta conclusão, medimos os la e os ângulos. Dando 1,97 cm cada la do e 48,40° dois ângulos e 131,60° ou tros dois ângulos.

De seguida investigámos o trapézio rectângulo. Vimos que unind os pontos médios de lados consecutivos dava origem a um paralelogramo.

Justificação:



Isto verificou-se porque o paralelogra mo tem pares de lados e iguais e ângulos opostos iguais. Para chegarmos a esta conc são, medimos os lados e os ângulos. Dand dois lados de 1,10 cm e outros dois de 0,87 cm e dois ângulos de 115,05° e outros dois de 64,

De seguida investigámos o trapézio escaleno. Verificámos que un do os pontos médios de lados consecutivos dava origem a um par lelogramo.

Justificação:

Isto verificou-se porque o paralelogra mo tem pares de lados e iguais e ân gulos opostos iguais. Para chegarmos a esta conclusão, medimos os lados e o ângulos. Dando ~~dois lados~~ 1,65 cm ~~e outros dois de~~ cada e dois ângulos de 58,25° e out dois de 121,75°.

A realização do trabalho foi fácil, embora tenha demorado um p mais do tempo previsto.

Ambos trabalhámos de igual modo, na realização do relatório.

Consultámos, principalmente, a ficha nº7, para conseguirmos ver todas as questões.

Do trabalho apresentado pelas alunas ressaltam: o facto de terem seguido o guião fornecido, não se terem desprendido dos comprimentos que obtinham no AGD e algumas correcções que foram fazendo e são evidentes no relatório.

Nas conclusões, um grupo de alunos destacou-se por ter tentado apresentar relações entre os quadriláteros, que justificassem o porquê de se obterem figuras iguais quando se partia de quadriláteros com algumas características iguais. Basicamente, utilizaram as potencialidades do AGD para medir amplitudes de ângulos e comprimentos de segmentos. Estes alunos classificaram as relações que encontraram entre os vários quadriláteros da seguinte forma: (i) *diagonais perpendiculares*, agrupando os losangos e papagaios, pois dão sempre origem a rectângulos; (ii) *lados opostos paralelos e ângulos iguais consecutivos*, juntando os rectângulos e os trapézios isósceles, pois formam sempre losangos; e (iii) *propriedades únicas dos quadrados*, pois dão sempre origem a outros quadrados.

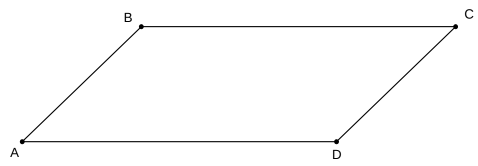
Alguns grupos de alunos prolongaram a sua investigação aos triângulos, tendo, alguns deles, tentado obter uma conjectura sobre o tipo de triângulos que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados de um triângulo inicial. Um dos grupos que prosseguiu este caminho concluiu que se formava sempre "um triângulo com as mesmas propriedades do que o original". Esta frase contém dois aspectos interessantes: (i) os alunos terem associado a ideia de *original*, o que faz antever uma relação, ou mesmo, uma função entre o triângulo inicial (o original) e o triângulo resultante da união dos pontos médios de lados consecutivos (a imagem); e (ii) a percepção que os alunos tiveram ao compreender que existia algo comum entre os triângulos originais e as suas imagens (triângulos rectângulos originam triângulos rectângulos, triângulos isósceles originam triângulos isósceles, etc.).

Um outro grupo de alunos decidiu construir primeiro um quadrilátero, depois o que resultava da união dos pontos médios dos seus lados e de seguida os que resultavam da união dos pontos médios dos lados do segundo quadrilátero (como se fossem termos de uma sequência).

Tarefa 9 – Propriedades do paralelogramo (PL)

Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

1. Na figura seguinte representa o paralelogramo ABCD.



Esta definição permite deduzir várias propriedades do paralelogramo, nomeadamente:

(1) Lados opostos num paralelogramo têm o mesmo comprimento;

(2) Ângulos opostos num paralelogramo têm a mesma amplitude;

(3) Ângulos consecutivos num paralelogramo são suplementares;

(4) As diagonais de um paralelogramo bissectam-se mutuamente;

(5) As diagonais de um paralelogramo dividem-no em quatro pares de triângulos congruentes;

(6) O paralelogramo tem uma simetria rotacional de 180º.

Escolhe **duas** das propriedades anteriores e demonstra-as.

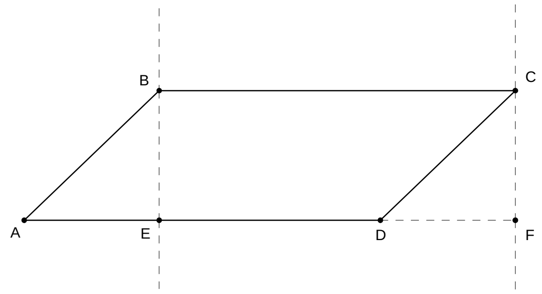
2. A fórmula para calcular a área do paralelogramo pode ser obtida através da fórmula que permite calcular a área do rectângulo (*comprimento* × *largura*) .

Na figura é possível observar:

-o paralelogramo ABCD;

-as perpendiculares a AD que passam por B e por C;

-o rectângulo BDEF.



As seguintes questões sugerem um caminho para deduzir a fórmula que permite calcular a área do paralelogramo.

2.1. Qual é a relação entre o triângulo ABE e o triângulo DCF? Justifica a tua resposta.

2.2. Tendo em conta a resposta à questão anterior, qual é a relação entre as áreas do paralelogramo ABCD e do rectângulo EBCF? Porquê?

2.3. AD é uma base do paralelogramo ABCD e BE é uma altura deste paralelogramo. Escreve uma fórmula que permita calcular a área do paralelogramo e dependa somente dos comprimentos da base e da altura.

Tarefa 9 – Propriedades do paralelogramo

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos.
- Compreender relações entre elementos de um triângulo e usá-las na resolução de problemas;
- Compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo;
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos, bem como ângulos alternos internos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender e usar a fórmula da área de um paralelogramo e investigar as propriedades deste quadrilátero;
- Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com as propriedades do paralelogramo.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

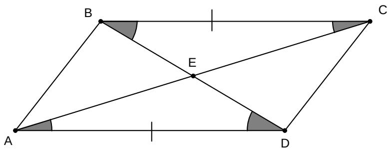
- Identificarem e utilizarem o raciocínio indutivo e dedutivo.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. A tarefa pode ser resolvida em grupo, realizando-se posteriormente uma discussão final dos resultados a que os alunos chegaram. Para que as seis propriedades possam ser trabalhadas nessa discussão, o professor pode pedir a demonstração de uma propriedade diferente a cada grupo, garantindo que todas as propriedades são trabalhadas pelo menos por dois grupos diferentes. Deste modo, criar-se-ão condições para que na discussão possa existir diálogo e confronto de diferentes pontos de vista.

Na síntese final, o professor dá relevo aos resultados matemáticos obtidos – as propriedades do paralelogramo e a fórmula para calcular a sua área. Chama a atenção dos alunos, mais uma vez, para a diferença entre raciocínio dedutivo e indutivo.

2. *Exploração matemática.* A primeira questão tem como objectivo levar os alunos a demonstrar pelo menos duas propriedades do paralelogramo.

Propriedade	**Demonstração**
(1) Lados opostos num paralelogramo têm o mesmo comprimento.	Os lados opostos são segmentos de recta paralelos entre rectas paralelas, logo são iguais.
(2) Ângulos opostos num paralelogramo têm a mesma amplitude.	Construindo uma das diagonais do paralelogramo, obtemos dois triângulos congruentes (critério LLL), logo os ângulos opostos têm a mesma amplitude.
(3) Ângulos consecutivos num paralelogramo são suplementares.	A amplitude do ângulo suplementar de qualquer um dos ângulos do paralelogramo é igual à amplitude do ângulo consecutivo (ângulos internos alternos). Logo, a soma das amplitudes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 180 º.
(4) As diagonais de um paralelogramo bissectam-se mutuamente. 	$\angle BCA \equiv \angle CAD$ e $\angle CBD \equiv \angle ADB$, porque são ângulos internos alternos. $AD \equiv BC$, porque são lados opostos do paralelogramo. Logo, pelo critério ALA de congruência de triângulos, o triângulo AED é congruente com o triângulo BEC. Logo, $AE \equiv EC$ e $BE \equiv ED$ porque são lados correspondentes de triângulos congruentes.
(5) As diagonais de um paralelogramo dividem-no em dois pares de triângulos congruentes.	$\angle BCA \equiv \angle CAD$ e $\angle CBD \equiv \angle ADB$, porque são ângulos internos alternos. $AD \equiv BC$, porque são lados opostos do paralelogramo. Logo, pelo critério ALA de congruência de triângulos, o triângulo AED é congruente com o triângulo BEC. Do mesmo modo se prova que o triângulo AEB é congruente com o triângulo DEC.
(6) O paralelogramo tem uma simetria rotacional de 180º.	O ponto de encontro das diagonais do paralelogramo é o centro da simetria rotacional com amplitude de 180º.

A questão 2. tem como objectivo levar os alunos a escrever a fórmula que permite calcular a área do paralelogramo, sabendo-se os comprimentos da sua base e da sua altura. Na pergunta 2.1. o triângulo ABE é congruente com o triângulo DCF (critério ALA), visto que $\angle AEB \equiv \angle DFC$ (ângulos rectos), $EB \equiv CF$ (alturas do paralelogramo) e $\angle ABE \equiv \angle DCF$ (ângulos de lados paralelos).

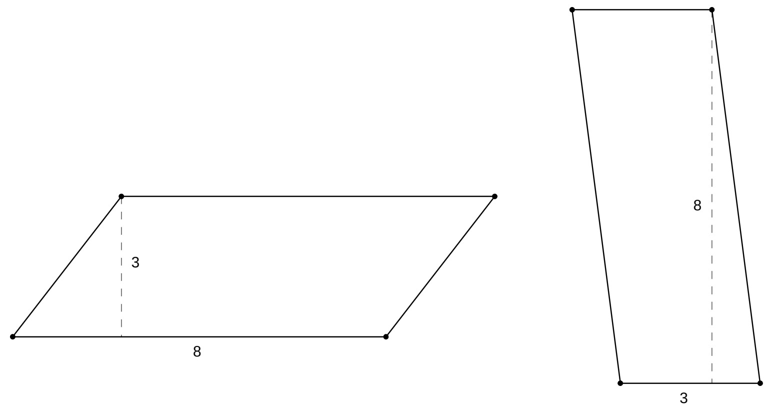
Na pergunta 2.2., os triângulos ABE e DCF têm a mesma área por serem congruentes e, portanto, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do rectângulo EBCF. Logo, a resposta à pergunta 2.3. é agora simples: como $A_{ABCD} = A_{EBCF}$ e

$$\begin{aligned} A_{EBCF} &= \text{comprimento} \times \text{altura} \\ &= \text{base} \times \text{altura} \end{aligned}$$

concluímos que $A_{ABCD} = \text{base} \times \text{altura}$.

3. Indicações suplementares. Caso exista tempo, ou como tarefas a resolver extra-aula, o professor pode propor problemas como os que se seguem:

1. Na seguinte figura estão desenhados dois paralelogramos.



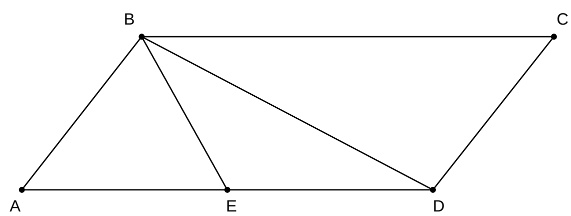
1.1. Calcula e compara as áreas destes paralelogramos.

1.2. Desenha outro paralelogramo diferente destes, mas que tenha a mesma área.

1.3. Quantos paralelogramos existem com a mesma área?

1.4. Como estão relacionadas a base e a altura destes paralelogramos?

2. Na figura seguinte está desenhado o paralelogramo ABCD. O ponto E é o ponto médio do lado AD.



Responde às seguintes questões justificando o teu raciocínio.

2.1. Qual é a razão entre a área do triângulo ABD e a área do paralelogramo ABCD?

2.2. Qual é a razão entre a área do triângulo ABE e a área do paralelogramo ABCD?

O primeiro problema tem como objectivo desmistificar a ideia que por vezes surge nos alunos de que não existem paralelogramos diferentes com a mesma área. Na pergunta 1.1., os alunos utilizam a fórmula para calcular a área dos dois paralelogramos (área igual a 24). Na pergunta 1.2., os alunos desenham um outro paralelogramo, diferente dos apresentados, mas que tenha a mesma área. Isso implica que o produto entre o comprimento da base e a altura seja 24. Com a experiência acumulada espera-se que o aluno consiga responder que existem infinitos paralelogramos que tenham 24 unidades de área, à pergunta 1.3. O objectivo da pergunta 1.4. é que os alunos escrevam a fórmula, relacionando a base e a altura destes paralelogramos, isto é, $\text{base} \times \text{altura} = 24$.

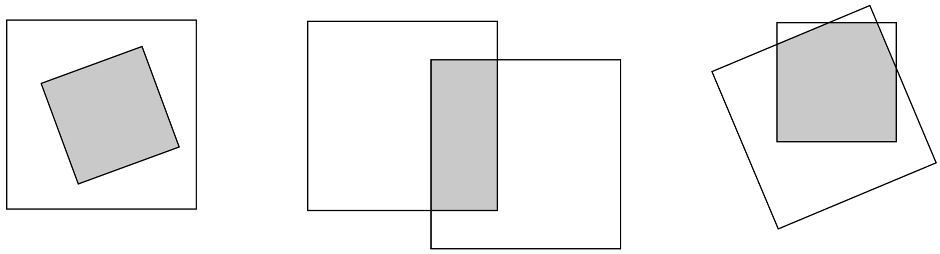
Na questão 2. o objectivo é relacionar a área do paralelogramo com a de dois triângulos. Na pergunta 2.1. a área do triângulo ABD é metade da área do paralelogramo ABCD, porque BD é uma diagonal do paralelogramo. Na questão 2.2. a área do triângulo ABE é um quarto da área do paralelogramo ABCD. A justificação desta última relação pode ser obtida seguindo vários raciocínios como o seguinte:

$A_{\text{paralelogramo}} = b \times a$, em que **b** é o comprimento da base e **a** é altura do triângulo ABE.

$A_{ABE} = \dfrac{\frac{b}{2} \times a}{2} = \dfrac{b \times a}{4}$. Daqui se conclui que a área do triângulo ABE é um quarto da área do paralelogramo ABCD.

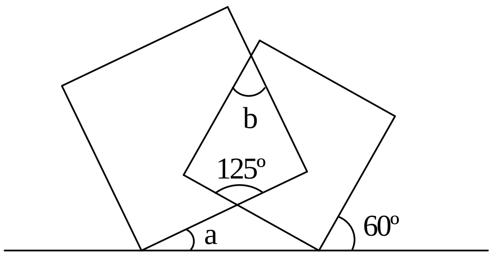
Tarefa 10 – Problemas com triângulos e quadriláteros (PL)

1. A sobreposição parcial de dois quadrados, não necessariamente com o mesmo lado, gera um polígono, exemplificado na figura pelas zonas sombreadas.



Dá exemplos de polígonos que se podem obter por sobreposição e de polígonos que não se podem obter. Mostra como podem ser obtidos.

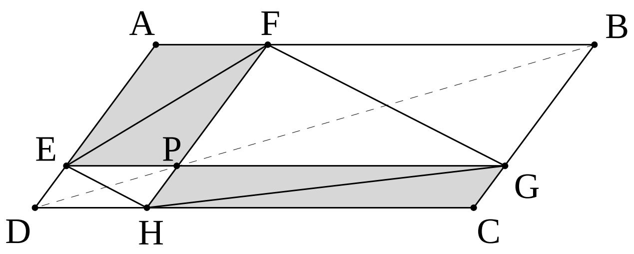
2. Na figura estão representados uma recta e dois quadrados parcialmente sobrepostos. Determina as medidas dos ângulos ‘a’ e ‘b’. Apresenta os teus cálculos e as respectivas justificações.



3. Completa a tabela com ‘sim’ (que significa *sempre*) ou ‘não’ (que significa *nem sempre*).

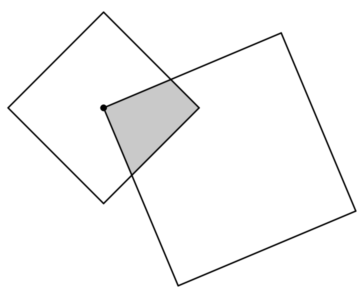
	Papagaio	**Trapézio isósceles**	**Paralelogramo**	**Losango**	**Rectângulo**	**Quadrado**
Lados opostos paralelos						
Lados opostos congruentes						
Ângulos opostos congruentes						
Diagonais bissectam-se mutuamente						
Diagonais perpendiculares						
Diagonais congruentes						
Um eixo de simetria						
Dois eixos de simetria						

4. Constrói um paralelogramo ABCD e uma das suas diagonais, por exemplo BD. Escolhe um ponto P nessa diagonal. Por esse ponto traça uma paralela a cada um dos lados do paralelogramo (ver figura). O que conjecturas quanto à área dos quadriláteros sombreados? Demonstra a tua conjectura.



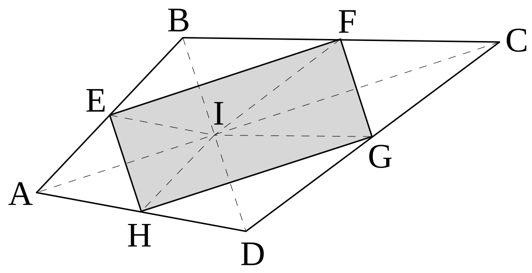
5. Dois pontos A e B estão situados no mesmo lado de uma recta r. Descobre um ponto X na recta r, de tal modo que a soma AX+XB seja mínima. Leva em conta que, na Geometria Euclidiana, a distância mínima entre dois pontos é dada pelo comprimento do segmento de recta que os une.

6. Dois quadrados sobrepõem-se como mostra a figura.



Um dos vértices do quadrado maior coincide com o centro do quadrado menor. Qual é a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor? Demonstra-a.

7. Vamos investigar a relação entre a área de um quadrilátero e a área do quadrilátero que se obtém a partir deste unindo os pontos médios dos seus lados. Um aluno começou por desenhar um papagaio (quadrilátero ABCD da figura) e conjecturou que a área do quadrilátero EFGH é igual a metade da área do papagaio ABCD. Ao analisar a figura, afirmou: “Mas é evidente! É fácil ver que as áreas são iguais. Basta dobrar os cantos!”



Ou seja, o aluno concluiu que por dobragem de papel pelos segmentos EF, FG, GH e HE é possível mostrar que a área do quadrilátero EFGH é metade da área de ABCD. A conjectura do aluno é correcta? E a demonstração que ele propôs? Partindo de outros quadriláteros investiga até que ponto é possível generalizar a conjectura do aluno e o seu método de demonstração.

Tarefa 10 – Problemas com triângulos e quadriláteros

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar os elementos de triângulos e quadriláteros e compreender as suas propriedades;
- Conhecer o paralelogramo;
- Construir triângulos sendo dados os comprimentos dos três lados, os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado, ou o comprimento de um lado e as amplitudes dos dois ângulos com esse lado comum;
- Utilizar relações entre elementos de um triângulo (lados, ângulos internos, ângulos externos) na resolução de problemas;
- Compreender critérios de congruência de triângulos

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Ser capazes de utilizar critérios de congruência de triângulos e propriedades de quadriláteros na resolução de problemas e na justificação de propriedades de figuras.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Seleccionarem e usarem vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração;
- Exprimirem processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. As questões propostas nesta tarefa abrangem diversos objectivos de aprendizagem, tanto matemáticos como transversais, de uma forma integrada. Há questões que envolvem raciocínio dedutivo (4. e 6.), raciocínio indutivo (7.), análise exaustiva de casos (1.), cálculo de medidas (2.), sistematização e comparação de propriedades dos quadriláteros de acordo com as duas hierarquias estabelecidas (3.) e resolução de problemas (todas as questões com excepção da 3.). Não é necessário que os alunos resolvam todas as questões, cabendo ao professor propor a resolução das que considerar mais adequadas aos alunos.

A comunicação, como de um modo geral em todas as aulas, deverá estar presente nas formas oral e escrita, muito em especial quando os alunos apresentam o seu trabalho e questionam o trabalho apresentado pelos colegas.

Uma vez que o estudo do paralelogramo assume particular destaque, as questões propostas pressupõem o conhecimento de propriedades fundamentais deste quadrilátero, em particular:

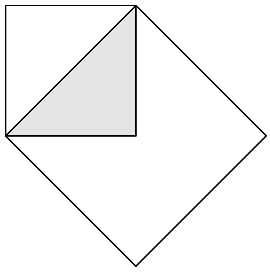
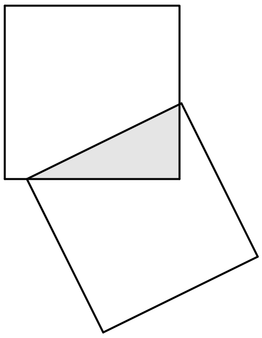
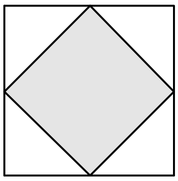
- Lados e ângulos opostos são congruentes;
- As diagonais bissectam-se mutuamente;
- Uma diagonal bissecta a área;
- A área pode calcular-se através do produto da base pela altura; no caso particular do losango, a área também pode ser calculada como o semi-produto das diagonais;
- Ângulos adjacentes são suplementares;
- As diagonais dividem o paralelogramo em quatro triângulos com a mesma área;
- As diagonais são perpendiculares apenas no caso do losango;
- As diagonais bissectam os ângulos apenas no caso do losango;
- O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios de um paralelogramo é ainda um paralelogramo;
- A área de um paralelogramo é o dobro da área do paralelogramo cujos vértices são os pontos médios do primeiro.

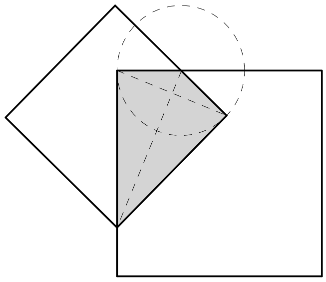
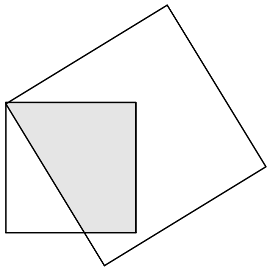
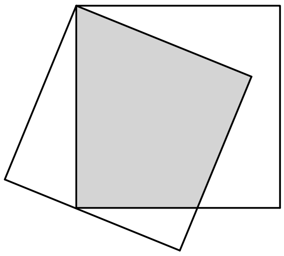
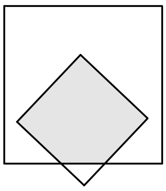
Nas questões mais complexas, ou seja, 4., 5., 6. e 7., é especialmente importante que os alunos tenham um tempo adequado para discutir ideias, formular conjecturas, testá-las e demonstrá-las. Na questão 7. não é necessário que os alunos explorem exaustivamente todos os tipos de quadriláteros. Podem estudar apenas dois ou três quadriláteros de um modo mais aprofundado. Dentre todos os alunos da turma deve ser possível obter uma significativa diversidade de casos.

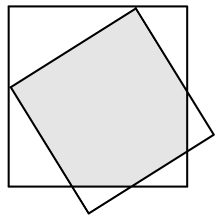
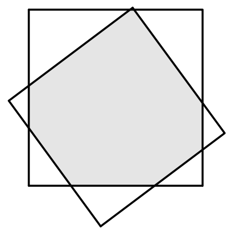
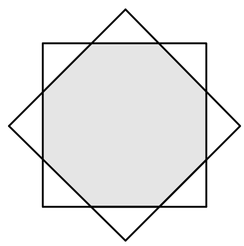
Para desenvolverem a capacidade de raciocinar em Matemática, os alunos devem ser estimulados a fundamentar as suas afirmações através de definições, conceitos, propriedades ou contra-exemplos, conforme os casos. Ao interagir com os alunos, o professor sublinha que um exemplo apenas corrobora uma conjectura mas não a demonstra, ao passo que um contra-exemplo invalida uma conjectura. Além disso, o facto de uma propriedade se verificar em alguns casos particulares – mesmo em grande número – não garante que se verifique em todos os casos.

Na síntese final, o professor pode realçar características importantes do trabalho dos alunos que são tipicamente matemáticas, tais como demonstrar uma propriedade que é dada à partida ou investigar situações com o objectivo de descobrir propriedades e tentar demonstrá-las. É importante chamar a atenção dos alunos para o papel das definições (por exemplo, de paralelogramo) nas demonstrações, para a importância de conhecer propriedades para obter novas propriedades e para a análise exaustiva de casos como método de demonstração.

2. Exploração matemática. Na questão 1., pretende-se que os alunos obtenham alguns polígonos por sobreposição parcial de dois quadrados e descrevam o modo como os obtiveram ou façam uma representação gráfica (esboço) da posição dos dois quadrados que gera o polígono. No quadro seguinte, apresentam-se exemplos de polígonos, possíveis esboços e descrições de como foram obtidos em cada caso:

Polígono	**Esboço do polígono**	**Possível descrição**
Triângulo rectângulo isósceles		Lado do quadrado maior coincide com a diagonal do menor.
Triângulo rectângulo escaleno		Dois vértices consecutivos do quadrado menor estão situados em pontos interiores de dois lados adjacentes do quadrado maior
Losango (ou quadrado)		Vértices do quadrado menor coincidem com os pontos médios dos lados do quadrado maior.

Papagaio		Dois lados adjacentes do quadrado menor intersectam dois lados adjacentes do quadrado maior de modo que uma das intersecções é um dos vértices do quadrado menor; a outra é o centro de uma circunferência que contém um vértice de cada um dos quadrados.
Trapézio rectângulo		Dois vértices do quadrado menor são pontos interiores do quadrado maior; um dos vértices é comum aos dois quadrados; o quarto vértice do quadrado menor é um ponto exterior do maior.
Quadrilátero irregular		Dois vértices do quadrado menor são pontos exteriores do quadrado maior; um vértice é um ponto interior do quadrado maior; o quarto vértice do menor é vértice comum aos dois quadrados. Um dos vértices do quadrado maior é um ponto interior do lado do quadrado menor que tem os pontos exteriores como extremidades.
Pentágono irregular		Três vértices do quadrado menor são pontos interiores do quadrado maior e o quarto vértice é um ponto exterior deste quadrado.

Hexágono irregular		Dois vértices do quadrado menor são pontos exteriores do quadrado maior e os outros dois vértices estão sobre dois lados adjacentes do quadrado maior. O lado do quadrado menor que contém os pontos exteriores do quadrado maior intersecta dois lados adjacentes do quadrado maior.
Heptágono irregular		Três lados do quadrado maior intersectam dois lados adjacentes do outro quadrado em pontos interiores destes lados; o quarto lado do quadrado maior intersecta o quadrado menor num dos seus vértices.
Octógono regular		Cada lado de cada um dos quadrados intersecta dois lados adjacentes do outro quadrado em pontos interiores destes lados.

Convém assinalar que alguns polígonos não se podem obter por sobreposição parcial de dois quadrados:

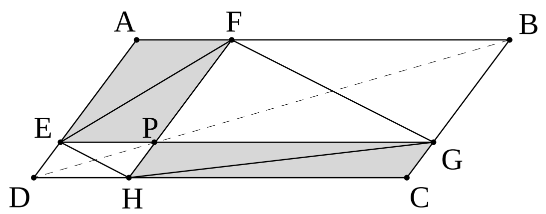
- Triângulos não rectângulos;
- Trapézios não rectângulos;
- Paralelogramos diferentes do rectângulo;
- Polígonos com mais de oito lados.

Na questão 2., a partir das amplitudes conhecidas e tendo em conta que:

- Os quadriláteros representados são quadrados;
- A soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo é 180º;
- Ângulos verticalmente opostos são iguais;
- A soma de dois ângulos suplementares é 180º;

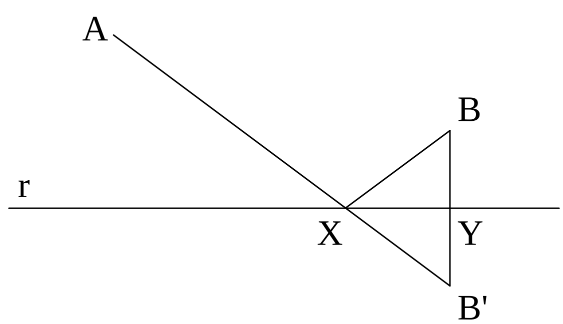
os alunos rapidamente podem determinar as amplitudes de todos os ângulos que estão representados sobre a recta dada (da direita para a esquerda 60º, 90º, 30º, 25º, 90º e 65º). Por outro lado, tendo em conta que a soma das amplitudes dos ângulos internos dum quadrilátero é 360º, e que os quadriláteros inicialmente representados são quadrados, facilmente se determina a medida da amplitude do ângulo b: 55º.

Na questão 4., sendo BD uma diagonal do paralelogramo ABCD, os triângulos BCD e DAB têm a mesma área. Ora, a área do triângulo BCD é igual à soma das áreas dos triângulos DHP e PGB e do paralelogramo PHCG.

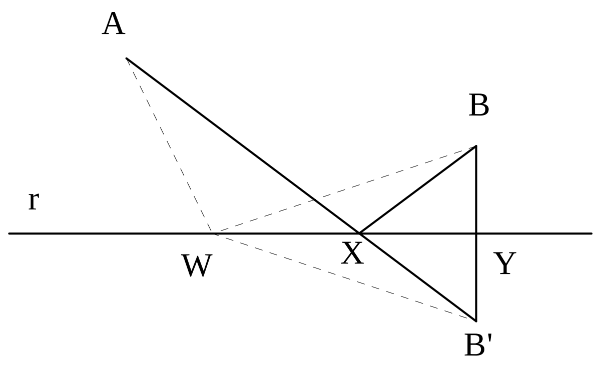


Analogamente, a área do triângulo DAB é igual à soma das áreas dos triângulos PED e BFP e do paralelogramo AEPF. Como os triângulos DHP e PED são congruentes (critério ALA) as suas áreas são iguais. O mesmo se pode concluir relativamente aos triângulos PGB e BFP. Logo, necessariamente, as áreas dos paralelogramos PHCG e AEPF são iguais.

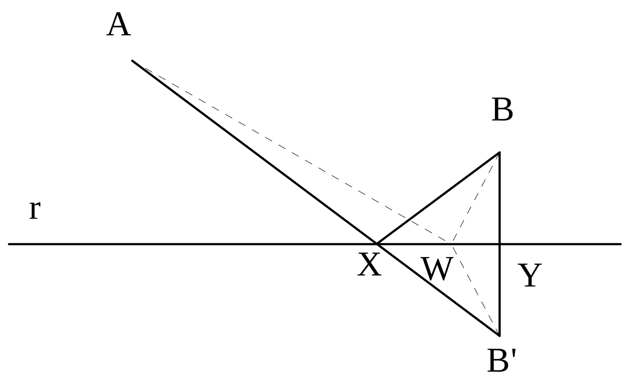
Na questão 5., sugere-se a construção do segmento de recta BB’, perpendicular a r, tal que os segmentos BY e B’Y sejam congruentes, sendo Y o ponto de intersecção de BB’ com r. Constrói-se, em seguida, o segmento AB’ que intersecta r num ponto X. A soma AX+XB’ é a menor possível para um ponto X na recta r, visto que a distância mais curta entre dois pontos no plano é dada pelo comprimento do segmento de recta que os une. Mas os triângulos YBX e YB’X são congruentes pelo critério LAL (os lados BY e B’Y são congruentes por construção; os ângulos BYX e B’YX são congruentes por serem ambos rectos; o lado XY é comum aos dois triângulos). Donde se conclui que os lados BX e B’X são congruentes. Então, a soma AX+XB’ é igual à soma AX+XB. Esta soma é mínima nas condições mencionadas como mostramos de seguida.



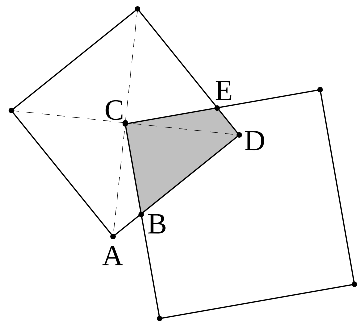
De facto, para qualquer outro ponto, digamos W, na recta r, a soma AW+WB é maior que a soma AX+XB. Essa situação, no caso em que X está localizado entre W e Y, é ilustrada na figura seguinte:



A soma AW+WB é igual à soma AW+WB’ e, por sua vez, é maior que AB’ (num triângulo – neste caso, no triângulo AWB’ – o comprimento de um lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Donde se conclui que AW+WB é maior que AX+XB. Se o ponto W estiver situado entre X e Y (ver figura seguinte) um argumento análogo permite-nos tirar a mesma conclusão.

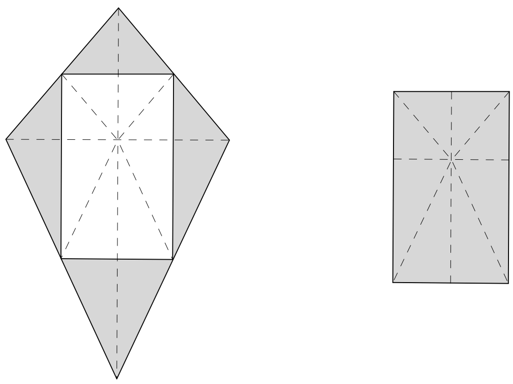


Na questão 6., atendendo às condições da figura, a área sombreada é uma quarta parte da área do quadrado menor. Traçando as diagonais do quadrado menor, constata-se que a área sombreada é igual à área do triângulo ADC porque os triângulos CDE e CAB são congruentes, logo têm a mesma área. De facto, pelo critério ALA podemos garantir que estes triângulos são congruentes (os ângulos CAB e CDE são congruentes e medem ambos 45º; os lados CA e CD são congruentes porque medem ambos metade da diagonal do quadrado; os ângulos ACB e DCE são congruentes porque são ambos complementares do ângulo BCD). Como, por sua vez, a área do triângulo ADC é uma quarta parte da área do quadrado menor, o resultado fica demonstrado.

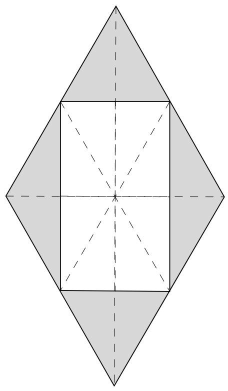


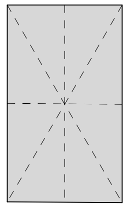
Na questão 7., a propriedade mencionada é válida para qualquer quadrilátero embora o ‘método de demonstração’ por dobragem seja válido apenas em casos particulares, nomeadamente quando as diagonais do quadrilátero em causa são perpendiculares. Usando critérios de congruência de triângulos, os alunos concluem que a propriedade é válida para alguns quadriláteros particulares e mostram se o método de ‘demonstração’ é válido ou não nesse caso. Podem considerar-se, para além do papagaio, outros quadriláteros como o quadrado, o rectângulo, o paralelogramo, o losango e o trapézio. Alguns exemplos de quadriláteros para os quais o método de demonstração por dobragem é válido são o papagaio, o losango e o trapézio rectângulo com diagonais perpendiculares, como se ilustra nas figuras seguintes.

Antes da dobragem **Depois da dobragem**



Antes da dobragem **Depois da dobragem**





Antes da dobragem **Depois da dobragem**