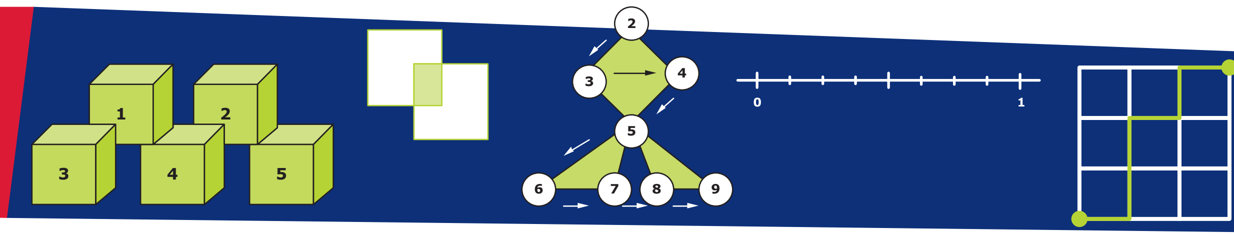


A Experiência Matemática no Ensino Básico

Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Ana Maria Roque Boavida
Ana Luísa Paiva
Graça Cebola
Isabel Vale
Teresa Pimentel

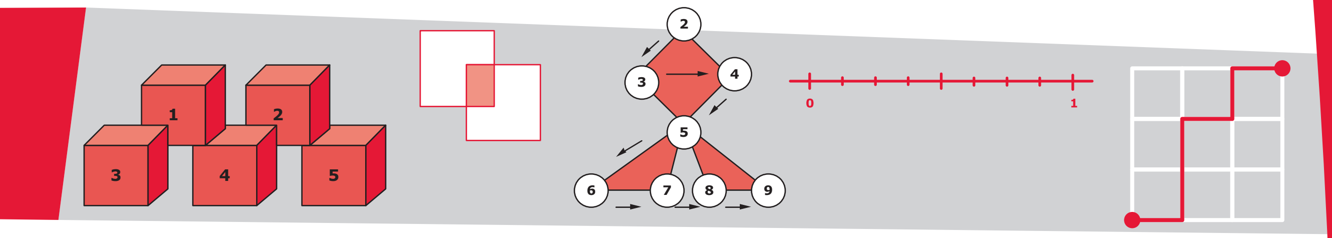
Consultora

Isabel Serra

Ministério da Educação

dgidc
Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

9 789727 422906



A Experiência Matemática no Ensino Básico

Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Ministério da Educação

dgidc
Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Ana Maria Roque Boavida
Ana Luísa Paiva
Graça Cebola
Isabel Vale
Teresa Pimentel

Consultora
Isabel Serra

Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular
Lisboa/2008

Biblioteca Nacional – Catalogação na Publicação

A experiência matemática no ensino básico/Ana Maria Roque Boavida... [et al.]

ISBN 978-972-742-290-6

I – BOAVIDA, Ana, 1955-

CDU 371
51
373

Ficha Técnica

A Experiência Matemática no Ensino Básico
Programa de Formação Contínua em Matemática
para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Editor
Ministério da Educação
Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Autores
Ana Maria Roque Boavida (coordenação), Ana Luísa Paiva,
Graça Cebola, Isabel Vale, Teresa Pimentel

Consultora
Isabel Serra

Design
Manuela Lourenço

Execução Gráfica
Editorial do Ministério da Educação

Tiragem
7500 Exemplares

Depósito Legal
272 931/08

ISBN
978-972-742-290-6

Índice

Nota de Apresentação

No âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, foi identificada a importância de ter documentos científicos que incidissem sobre temáticas relevantes e que pudessem apoiar os professores na preparação da sua prática lectiva.

A Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, no seguimento da proposta da Comissão de Acompanhamento do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, apresenta mais um volume da colecção de materiais de apoio destinados aos professores.

Da autoria de Ana Maria Boavida, Ana Luísa Paiva, Graça Cebola, Isabel Vale e Teresa Pimentel, a brochura *A Experiência Matemática no Ensino Básico* constitui-se como um recurso central para aprofundar a resolução de problemas, as conexões, a comunicação e a argumentação, apoiando ainda o professor na gestão da integração de conteúdos e processos matemáticos na aula.

A Subdirectora-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Joana Brocardo

(Joana Brocardo)

Introdução

As actuais orientações curriculares consideram como principais finalidades para o ensino da Matemática que os alunos valorizem esta disciplina através do contacto com ideias e métodos fundamentais desta área do saber e que desenvolvam capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Nesta brochura, apresentam-se aspectos considerados importantes para o ensino e aprendizagem da Matemática, esperando que seja útil aos professores no seu trabalho com os alunos. Pretende-se contribuir, por um lado, para a criação de condições favoráveis ao aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular do professor e, por outro, para melhorar as aprendizagens dos alunos, o que passa pela necessidade de desenvolverem uma atitude positiva em relação à Matemática.

Este documento foi, prioritariamente, pensado para professores do 1.º ciclo do ensino básico. Optou-se por centrá-lo em processos matemáticos transversais a vários temas e que são intrínsecos ao trabalho em Matemática: *resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e argumentação em Matemática*. Globalmente, a aprendizagem destes processos vai ao encontro das "três grandes capacidades transversais" destacadas no Programa de Matemática do ensino básico (Ponte et al., 2007). Esta opção justifica-se, antes de mais, por estarem previstas outras brochuras de apoio ao Programa de Formação centradas em temas matemáticos. Além disso, defende-se que dar um lugar de destaque a processos matemáticos, pode facilitar o envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem diversificadas e significativas que proporcionem uma visão global da Matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio.

O que se propõe não pretende ser uma alternativa à memorização ou treino de procedimentos, factos e conceitos, que também têm o seu papel no ensino e aprendizagem da Matemática, mas, antes, apresentar um complemento a este trabalho que permita desenvolver nos alunos capacidades de nível cognitivo mais elevado.

No que se refere à estrutura do documento, começa-se por analisar separadamente cada um dos processos matemáticos referidos. Esta separação é artificial e ocorre por razões de ordem prática, nomeadamente pela necessidade de analisar teoricamente cada um. No contexto da sala de aula estes processos não devem ser trabalhados isoladamente. Esta ideia justifica a existência de um último capítulo onde os processos matemáticos aparecem interligados e integrados com conteúdos matemáticos entendidos como temas e tópicos matemáticos.

Em cada capítulo, não houve a preocupação de abordar todos os temas do currículo de Matemática do 1.º ciclo do ensino básico. No entanto, ao longo da publicação, procurou-se encontrar um equilíbrio na presença de vários temas que são abordados a partir de tarefas e episódios de sala de aula adequados a este ciclo, recorrendo a uma linguagem que se pretende rigorosa, mas acessível.

Embora os exemplos e episódios apresentados tenham sido seleccionados pensando no professor do 1.º ciclo que, sendo generalista, também ensina Matemática, muitas das tarefas propostas são adequadas a anos de escolaridades posteriores onde podem ser exploradas com um maior grau de profundidade. Do mesmo modo, as perspectivas teóricas que orientaram a concepção da brochura são transversais à globalidade do ensino básico, pelo que podem servir de referência para delinear e levar à prática estratégias de concretização do currículo de Matemática de outros ciclos.

O capítulo 1 foca-se na *resolução de problemas* enquanto processo matemático de importância crucial para a aprendizagem da Matemática desde o 1.º ciclo do ensino básico. Começa-se por discutir o significado da terminologia habitualmente utilizada, passando, depois, para questões associadas à resolução e formulação de problemas recorrendo a exemplos ilustrativos passíveis de utilização na sala de aula.

É às *conexões matemáticas* que se dedica o capítulo 2, onde, através de exemplos, se evidenciam relações entre a Matemática e a realidade, entre a Matemática e outras áreas curriculares e, também, entre tópicos da própria Matemática. Em particular, procura-se destacar que o estabelecimento de conexões proporciona uma compreensão mais profunda e duradoura das ideias matemáticas e uma valorização da Matemática como instrumento de compreensão do mundo.

A *comunicação matemática*, enquanto meio facilitador de aprendizagens significativas, é o cerne do capítulo 3. Para ilustrar diferentes dimensões deste processo, recorre-se à análise de pequenos diálogos e produções dos alunos. Pelas suas interligações com a comunicação, abordam-se aspectos relacionados com modos de representar ideias matemáticas.

A ênfase no raciocínio matemático, sublinhada pelas actuais tendências curriculares, remete para salas de aulas em que a explicação e a justificação são aspectos chave da actividade dos alunos, o que traz para primeiro plano a importância e necessidade de dedicarmos atenção à *argumentação em Matemática* (Yackel & Hanna, 2003). Assim, o capítulo 4 centra-se neste processo, intimamente associado a experiências de aprendizagem em que assumem um papel preponderante a formulação e teste de conjecturas, bem como a fundamentação de raciocínios. Referem-se características essenciais e apresentam-se possíveis contextos e percursos argumentativos adequados à maturidade matemática dos alunos dos primeiros anos de escolaridade.

O capítulo 5, *Integrando* conteúdos e processos matemáticos, aborda essa integração através de dois pontos de vista complementares: tarefas e cultura de sala de aula. A primeira parte, tem um carácter mais prático, fazendo-se um percurso algo inverso ao dos capítulos anteriores. Isto é, parte-se de tarefas e respectivas propostas de exploração em sala de aula, para enfatizar processos matemáticos que aí têm uma maior relevância e os temas que, a partir delas, poderão ser trabalhados. Importa, no entanto, não esquecer que, como se referiu, os processos apresentados nos quatro capítulos anteriores estão interligados, pelo que atravessam a exploração de todas as tarefas. Estas foram escolhidas tendo em atenção níveis de complexidade diferenciados para poderem abranger vários anos de escolaridade e serem adequadas a alunos com características diferentes, o que permite desenvolver as referidas capacidades transversais. A segunda parte do capítulo, foca-se em características de uma cultura de sala de aula favorável à integração de temas e processos matemáticos, o que remete para a constituição e manutenção de uma comunidade interveniente, informada e crítica relativamente a ideias matemáticas fundamentais.

Espera-se que esta brochura seja útil para iluminar aspectos essenciais da experiência matemática que todos os alunos do 1.º ciclo do ensino básico devem vivenciar e, simultaneamente, para ajudar a delinear situações de ensino e aprendizagem que tenham em conta estes aspectos.

1

RESOLUÇÃO de PROBLEMAS em MATEMÁTICA

Aprendemos a resolver problemas resolvendo-os.

(Polya, 1945)

1.1 Introdução

Não se pode conceber a Matemática sem conceitos, definições, axiomas, teoremas, demonstrações, algoritmos ou fórmulas. São partes integrantes desta ciência. Contudo, os problemas – a sua formulação e resolução – são a essência da Matemática.

A resolução de problemas tem vindo a ser reconhecida como uma actividade relevante no currículo da Matemática escolar desde a publicação de *An agenda for action* (NCTM, 1980) até aos dias de hoje. De um modo geral, os professores estão atentos à importância deste processo matemático na aprendizagem, não só porque os documentos curriculares nacionais e internacionais apontam nesse sentido (ME, 2001; NCTM, 2000; Ponte et al., 2007), mas também porque os resultados dos estudos internacionais (TIMSS, 1996; PISA, 2003) não são nada animadores no que diz respeito ao desempenho dos alunos na resolução de problemas. A literacia matemática dos alunos é, num destes estudos, determinada pelo modo como usam os conhecimentos, as capacidades e as atitudes na resolução de problemas. Assim, é necessário propor-lhes experiências diversificadas que permitam desenvolver as suas capacidades de resolução de problemas, de modo a poderem tirar partido da Matemática ao longo da vida.

Neste capítulo realça-se a importância da resolução de problemas enquanto processo matemático crucial para a aprendizagem da Matemática. Note-se que não se pretende apresentar a resolução de problemas como a única alternativa para a actividade matemática na sala de aula. A aprendizagem da Matemática envolve outras experiências fundamentais entre as quais se incluem actividades mais rotineiras que apelam, nomeadamente à memória e ao treino. O que se defende é que este tipo de actividades deve ser complementado com outras mais desafiantes, como seja a resolução de problemas. Neste âmbito, começa-se por clarificar o significado de alguns termos frequentemente usados e, em seguida, apresentam-se diferentes tipos de problemas recorrendo a exemplos ilustrativos. Além disso, abordam-se estratégias de resolução e de formulação de problemas e foca-se a questão da selecção e enriquecimento de tarefas.

1.2 Problemas e estratégias de resolução

Numa perspectiva educacional, formular e resolver problemas é uma componente essencial de fazer Matemática e permite o contacto com ideias matemáticas significativas. É, também, uma oportunidade de envolver os alunos, desde muito cedo, em questões de modelação matemática que, tradicionalmente, são consideradas como tópicos de Matemática mais avançada.

Alguns autores referem que a resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma actividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a racionar matematicamente. A resolução de problemas pode, também, ser perspectivada num sentido mais abrangente, designando uma abordagem de ensino da Matemática: *ensino da Matemática através da resolução de problemas*. Aqui os problemas estão em primeiro plano, enquanto via facilitadora da aprendizagem. É esta perspectiva da resolução de problemas que se adopta neste capítulo.

Podem considerar-se duas componentes principais na resolução de problemas. A primeira, a *exploração*, consiste na descoberta de possíveis relações e usa o raciocínio e os processos indutivos e as estratégias que levam à procura da solução. A segunda, a *confirmação*, envolve testar essas relações e usa raciocínio e processos dedutivos, incluindo apresentar contra-exemplos e justificar as generalizações. O rigor de tais justificações depende do nível do aluno e da natureza do problema; algumas podem ser mais formais e outras usar palavras próprias para explicar porque é que a generalização funciona. Acrescenta-se, ainda, nalgumas situações, a componente *criativa* na qual cada um faz as suas próprias explorações, o que alguns autores chamam *extensões*. Esta componente criativa da resolução de problemas ajuda o professor e os alunos a formular novos problemas e a criar experiências mais ricas a partir dos problemas iniciais. Neste processo, para além dos aspectos cognitivos há que ter em conta também factores afectivos. Deve-se reconhecer a existência dos problemas e estar motivado para os compreender. É importante encorajar a exploração de ideias pelos alunos e o uso de modelos concretos para definir possíveis estratégias de resolução.

Um problema ou a sua resolução originam, na maior parte das vezes, problemas adicionais ou conceitos teóricos que por sua vez suscitam novos problemas matemáticos. Além disso, a resolução de problemas:

- proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação;
- fomenta o raciocínio e a justificação;
- permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares;
- apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.

Em suma, o entendimento que aqui se apresenta de resolução de problemas é o de um processo que deve orientar a actividade matemática na sala de aula do 1.º ciclo, proporcionando um contexto de aprendizagem em que se apresentam novos conceitos ou se aprofundam e aplicam conceitos já adquiridos. Ensinar Matemática através da resolução de problemas proporciona uma visão desta disciplina favorável ao estabelecimento de ligações dentro da própria Matemática, com outras áreas do currículo e com o dia a dia dos alunos, permitindo-lhes aprender como utilizar e aplicar a Matemática fora da escola.

1.2.1 O que é um problema?

Entre os vários tipos de tarefas a que o professor pode recorrer na sala de aula, umas dirigem-se mais à memória e ao treino enquanto outras estão mais direccionadas para processos mais complexos de pensamento. De acordo com Ponte (2005), as tarefas podem ser analisadas segundo duas dimensões principais: uma relacionada com o nível de estruturação e outra com o desafio matemático que suscitam. A estruturação da tarefa está associada ao grau de explicitação das questões colocadas, o que conduz a tarefas fechadas e a tarefas abertas. O desafio prende-se com o grau de dificuldade que se relaciona com conhecer-se, ou não, o processo de resolução. Assim, o desafio pode variar entre reduzido e elevado. Cruzando essas duas dimensões, Ponte propõe quatro tipos essenciais de tarefas: exercício (fechada, desafio reduzido); problema (fechada, desafio elevado); exploração (aberta, desafio reduzido); e investigação (aberta, desafio elevado).

Naturalmente, a distinção entre tarefas considerando a sua natureza nem sempre é fácil e, além disso, nenhuma categorização esgota todos os tipos de tarefas que se usam na sala de aula. Na verdade, poder-se-iam acrescentar outras dimensões como, por exemplo, a duração do tempo de resolução e o contexto que as enquadra.

Uma vez que o tema deste capítulo é a resolução de problemas, é importante distinguir a noção de *problema* de outras que com ela, por vezes, se identificam.

Há várias definições de problema. Adoptando a proposta pelo ME (2001), "os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução" (p.68). Assim, tem-se um problema quando se está perante uma situação que não pode resolver-se utilizando processos conhecidos e estandardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização do que se designa por estratégias. Caso contrário, isto é, se a situação pode ser resolvida utilizando processos *para nós* conhecidos, repetitivos ou mecanizados, que conduzem directamente à solução, estamos perante um exercício. Deste modo, ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe. Por exemplo, a questão *Calcula o produto 8x6* pode ter várias interpretações conforme o nível de conhecimentos de quem a enfrenta: um facto específico se a resposta é automática e faz recurso à memória; um exercício se mobiliza treino ou mecanização; ou um problema se envolve a descoberta de um caminho.

Importa que os problemas tenham as seguintes características: a) sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível; b) sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes; c) possam ter mais do que um processo de resolução; d) possam integrar vários temas.

Para um bom ensino da Matemática é essencial que o professor seja capaz de distinguir os vários tipos de tarefas, de modo a seleccionar as mais adequadas aos objectivos que tem em vista. Apresentam-se, em seguida, exemplos de um *exercício* (tarefa 1) e de um *problema* (tarefa 2), para alunos do 4.º ano de escolaridade:

> ***Calcular produtos***
>
> 1. Calcula o produto 83x6.
> 2. Preenche o espaço em branco de modo a obter uma afirmação verdadeira: ....x6 é um número compreendido entre 45 e 52.

Repare-se que na tarefa 1, basta aplicar o algoritmo da multiplicação que, em princípio, os alunos do 4.º ano já conhecem. Em contrapartida, na tarefa 2, precisam de recorrer a processos de raciocínio que vão para além do mero conhecimento da tabuada.

Tradicionalmente, quando se fala em resolução de problemas no ensino da Matemática, pensa-se em problemas que têm um enunciado definido e estruturado, uma e apenas uma solução e um processo de resolução pré-determinado que conduz à resposta certa ou errada. Contudo, como se referiu, um problema pode ser colocado num sentido mais aberto, suscitando nos alunos a procura de diferentes métodos e caminhos, e não apenas de uma resposta. Trata-se do que alguns autores designam por *investigações* (por exemplo, Ponte, 2005) ou *problemas abertos* (Stevenson, 2001), termos que, nesta brochura, se consideram sinónimos. Um exemplo de um *problema aberto*, adequado aos alunos dos dois primeiros de escolaridade, é: *Descobre o que conseguires sobre o número 25*. Algumas das descobertas podem ser: (a) 25 = 10 + 10 + 5; (b) é um número ímpar; (c) é igual a 5x5; (d) é um produto de factores iguais; (e) é 100 : 4; (f) são duas dúzias mais um.

Até aqui pretendeu-se clarificar o significado de vários termos associados à resolução de problemas e não valorizar um tipo de tarefas em detrimento de outras, pois todas têm o seu lugar na experiência matemática dos alunos. Focam-se, em seguida, características de diferentes tipos de problemas.

1.2.2 Diferentes tipos de problemas

Na sala de aula apresentam-se tarefas variadas com objectivos diversos. Também no âmbito da resolução de problemas, se podem explorar diferentes tipos de problemas que o professor deve seleccionar de acordo com os fins em vista. Deste modo, analisam-se de seguida alguns problemas focando a atenção no enunciado e no processo de resolução.

Quando se está perante um problema, é importante saber se o enunciado fornece a informação necessária para a sua resolução. Na vida quotidiana, geralmente isto não acontece: tem de se seleccionar entre vários dados aqueles que interessam para a situação de modo a obter uma solução satisfatória. De facto, é a identificação e selecção da informação que torna muitos problemas difíceis. Aos alunos devem ser proporcionadas oportunidades de seleccionar dados relevantes e identificar informação em falta, que é necessária para resolver a situação. *As compras da Inês* ilustram um *problema com informação insuficiente* (tarefa 1) e um *problema com informação extra* (tarefa 2).

As compras da Inês

1. A Inês comprou dois CD's ao Luís. Decidiu vender o 1.º CD por 3 euros e o 2.º CD por 5 euros. Qual foi o lucro que a Inês obteve com a venda?
2. A Inês comprou três CD's ao Luís por 1, 3 e 5 euros. Vendeu os dois primeiros por 4 euros cada. Qual foi o lucro que a Inês obteve com a venda?

Há várias tipologias de classificação de problemas matemáticos que diferem segundo os autores (Vale & Pimentel, 2004). Neste capítulo, opta-se por uma classificação simples, adequada ao 1.º ciclo, em que se consideram apenas problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos.

Problemas de cálculo

Os problemas de cálculo requerem decisões quanto à operação ou operações a aplicar aos dados apresentados. Os alunos lêem o problema, avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efectuam uma ou mais operações que consideram apropriadas usando os dados do enunciado. Neste âmbito, podem diferenciar-se *problemas de um passo* e *problemas de mais passos* ilustrados, respectivamente, através das tarefas *Vedar o quintal* e *Pintar mesas*.

Vedar o quintal

O quintal da Sandra é quadrado com 5 metros de lado. Quantos metros de rede são necessários para vedar o quintal?

Pintar mesas

O Luís pintou três mesas na segunda-feira e quatro na terça. Na quarta à noite precisa de entregar uma dúzia. Quantas mesas precisa de pintar na quarta-feira?

Vedar o quintal é um *problema de um passo*, pois, para o resolverem, os alunos necessitam apenas de utilizar uma operação. Em contrapartida, em *Pintar mesas*, um *problema de mais passos*, há que recorrer a mais do que uma operação para chegar à solução.

Os problemas de cálculo são os que, nos manuais escolares, normalmente aparecem no fim de um tema. Têm algumas potencialidades. Nomeadamente, proporcionam aos alunos a oportunidade de aplicarem conceitos e destrezas previamente aprendidos e praticarem esta aplicação. No entanto, o risco de lhes propor exclusivamente estes problemas reside em poderem levá-los a leituras demasiado rápidas, a análises superficiais ou a respostas sem qualquer nexo. Ilustra-se, em seguida, esta situação a partir de resoluções apresentadas por alunos para três questões que lhes foram colocadas.

Questões	**Resoluções e respostas de alunos**
1. Um pastor tem 120 ovelhas e 3 cães. Quantos anos tem o pastor?	$120 + 3 = 123$ $120 - 3 = 117$ $120 \times 3 = 360$ $120 : 3$ → 00 40, 0 Resposta: O pastor tem 40 anos.
2. Um agricultor tem 12 vacas. Todas morreram menos 5. Quantas vacas restam?	12–5=7 Resposta: Restam 7 vacas.
3. A Ana tem 5 bolas, que são mais 3 do que as da Rita. Quantas bolas tem a Rita?	5+3=8 Resposta: A Rita tem 8 bolas.

Estas resoluções permitem evidenciar dois aspectos. Por um lado, os alunos podem pensar que todos os problemas têm de ter forçosamente solução que se obtém à custa de uma das quatro operações elementares que conhecem, o que é absurdo no exemplo 1. Por outro lado, podem associar determinadas palavras a uma operação, como se vê nos exemplos 2 e 3.

No seu conjunto, os exemplos mostram os perigos de o aluno se "lançar às cegas" na manipulação simbólica sem compreender o que está em causa com o problema nem o significado das operações e dos símbolos. A primeira questão não tem dados suficientes, mas há uma tentativa de lhe dar uma resposta plausível com os dados disponíveis. Aparentemente a aluna, que apresentou a resposta, partiu do princípio de que todos os problemas têm solução e, assim, utiliza as operações que conhece e vai avaliando o resultado obtido, até encontrar um que lhe parece adequado. No segundo exemplo, tem-se a tentação de realizar a subtração 12–5 e dar como resposta 7 porque o enunciado refere *menos 5*. A resposta correcta é 5, mas para lá chegar tem de se pensar e interpretar o enunciado. O mesmo acontece no terceiro exemplo. Os números 5 e 3 ligados pela palavra *mais* induzem a realização da adição 5+3 originando a resposta errada 8.

Salienta-se, no entanto, que o tipo de respostas apresentadas pelos alunos às questões está muito relacionado com o ensino realizado e com a cultura de sala de aula, já que se as questões forem colocadas noutros ambientes, nomeadamente em contextos não escolares, a percentagem de respostas despropositadas diminui muito (Baruk, 1985).

Outra situação que é necessário referir é a das condicionantes reais do contexto do problema que podem fazer com que a solução encontrada, embora matematicamente correcta, não faça sentido na realidade. Observe-se o exemplo:
Temos quatro espelhos de 2,5 metros de largura. Quantos espelhos de 1 metro de largura se podem obter?

Se o aluno se limitar a multiplicar 4 por 2,5 para obter a largura total e, de seguida, a dividir por 1 chega à conclusão que se podem obter 10 espelhos, o que, na realidade, não tem interesse já que conduziria a que dois dos espelhos tivessem de ter uma emenda. Na verdade, na vida real esta situação, normalmente, não é desejável.

Problemas de processo

Os *problemas de processo* diferem dos de cálculo porque não podem ser resolvidos apenas por selecção da(s) operação(ões) apropriada(s). Estão, geralmente, embutidos em contextos mais complexos e requerem um maior esforço para compreender a Matemática necessária para chegar à solução, uma vez que tem de se recorrer a estratégias de resolução mais criativas para descobrir o caminho a seguir. Requerem persistência, pensamento flexível e uma boa dose de organização.

Estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou para aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos. Colocam questões que apelam ao envolvimento dos alunos e proporcionam experiências matemáticas ricas e significativas (NCTM, 2000) requerendo da sua parte o uso de várias estratégias. O sucesso reside, muitas vezes, na capacidade que cada um tem de compreender e identificar a estrutura matemática do problema. Observe-se, por exemplo, o problema *A compra e venda de CD's*.

> ***A compra e venda de CD's***
>
> A Inês comprou um CD por 3 euros e vendeu-o ao Luís por 5 euros. Mais tarde comprou-o de volta ao Luís por 7 euros e tornou a vendê-lo por 9 euros. Será que a Inês ganhou ou perdeu com esta compra e venda?

Este problema não tem uma solução óbvia e para o resolver o aluno tem de ir para além dos aspectos enganadores nele implicados, o que pode aguçar o seu interesse. Na verdade, para o resolver pode pensar-se de dois modos diferentes:

1. Na primeira transacção, a Inês comprou por 3 euros e vendeu por 5 euros logo ganhou 2 euros (+2). Ao fazer a segunda transacção, como comprou por 7 euros o que tinha vendido por 5 perdeu 2 euros (-2), o que neutraliza o primeiro ganho (+2–2=0). De seguida, vendeu o mesmo por 9 euros tendo ganho assim no total 2 euros (+2).

2. Ao fazer a primeira transacção, a Inês comprou por 3 euros e vendeu por 5 euros logo ganhou 2 euros (+2). Na segunda transacção a Inês comprou por 7 euros e vendeu por 9 euros, logo ganhou 2 euros (+2). Assim, no total, o lucro foi de +2+2=4 euros.

Afinal qual foi o lucro, dois ou quatro euros? Podemos justificar o modo de pensar correcto por duas vias diferentes:

- A segunda transacção só por coincidência é efectuada sobre o mesmo objecto. Experimente pensar que na segunda vez a Inês foi comprar não um CD mas um livro, e não ao Luís mas ao João. Como estes acontecimentos são independentes, já é claro verificar que a Inês ganhou dois euros em cada transacção, donde ganhou no total 4 euros.

- Podemos supor que temos no bolso uma determinada quantia, por exemplo 10 euros, e, fazendo os cálculos correspondentes às transacções, comparar a quantia final com a inicial: 10–3=7; 7+5=12; 12–7=5; 5+9=14; 14–10=4. Ou seja, houve um lucro de 4 euros.

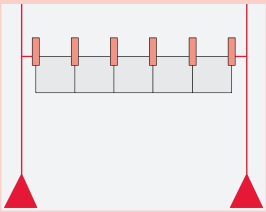
Problemas abertos

Os *problemas abertos*, também aqui designados por *investigações*, podem ter mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correcta. Para os resolverem, os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjecturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão.

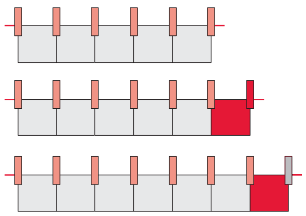
Uma possibilidade de clarificar o significado de *problema aberto* é confrontar este tipo de problemas com problemas de cálculo e de processo. Para o efeito, analise-se uma sucessão de tarefas – *Caixa de molas* (problema de cálculo), *Os trabalhos de Catarina* (problema de processo) e *Mais guardanapos* (problema aberto) – que têm por contexto a actividade de pendurar guardanapos usando molas.

> ***Caixa de molas***
>
> A Catarina usou três molas para pendurar três guardanapos e a Ana usou duas molas para pendurar um guardanapo. As duas amigas usaram uma caixa com meia dúzia de molas. Descobre se as molas chegaram para pendurar os guardanapos.

Trata-se de um *problema de cálculo* que utiliza dois passos. Adicionando as molas da Catarina com as da Ana obtemos 3+2=5. Como a caixa tem 6 molas e 5 é menor que 6, as molas chegam. Esta tarefa pode ser transformada noutra, com um grau de desafio mais elevado para os alunos, que poderá ser formulada a exemplo de *Os trabalhos da Catarina*.

> ***Os trabalhos da Catarina***
>
> A Catarina vai pôr a secar muitos guardanapos pendurando-os, ordenadamente, como se mostra.
> Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 5, 6, 7, 10 ou 20 guardanapos.
>
> 

Há diferentes modos de resolver este problema, mas há apenas uma solução. É *um problema de processo*, já que o aluno não se limita a aplicar uma ou mais operações conhecidas. Tem de fazer algumas experiências para chegar a uma regra que lhe permita descobrir e dar a resposta para 20 guardanapos sem ter que fazer a contagem das molas uma a uma. Por exemplo, usar um desenho e/ou uma tabela, descobrir o padrão e generalizar. Inicialmente, começa por particularizar para alguns casos. Para calcular o número de molas necessárias para 20 guardanapos sem ser necessário fazer todas as operações até lá chegar, tem de identificar a lei de formação presente na relação entre as sequências numéricas em causa, para poder concluir que o número de molas é igual ao número de guardanapos mais um:

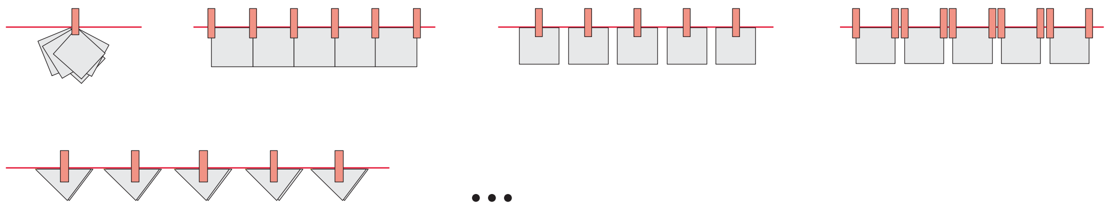


N.º de guardanapos	N.º de molas
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
...	...
20	21

Mais guardanapos

A Catarina vai pôr a secar guardanapos. Porque é uma rapariga organizada, pendura, todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos.

Aparentemente esta situação parece idêntica à anterior mas não é. Enquanto em *Os trabalhos da Catarina* é dado o modo como os guardanapos estão a secar, aqui é necessário descobrir as várias maneiras de os colocar a secar. Além disso, nada é dito nem apresentado sobre o formato do estendal (pode ser, por exemplo, circular) nem sobre o número de cordas que tem. *Mais guardanapos* é, assim, um problema aberto que permite várias abordagens. Por exemplo, se a Catarina tiver 5 guardanapos, o estendal tiver uma só corda e não for circular, pode pô-los a secar de diferentes modos:



Para cada um destes modos de secar os guardanapos há um número de molas correspondente e, claro, que para 30 guardanapos, as possibilidades aumentam. Basta reparar, por exemplo, que se podem agrupar os guardanapos em conjuntos de 1, 2, 3, 5,... elementos, ou seja os divisores de 30 (claro que, se o número de guardanapos por mola for demasiado grande, o problema torna-se fisicamente impossível). O professor deve discutir com os alunos se há modos equivalentes quanto ao número de molas antes de analisar cada caso individualmente, seguindo um processo análogo ao apresentado na tarefa *Os trabalhos da Catarina*.

Uma possível extensão desta tarefa é colocar a questão ao contrário, ou seja: *Se tivermos um determinado número de molas, quantos guardanapos podemos pendurar?*

Note-se que, numa investigação, poderá haver alunos que fazem uma exploração total da questão e outros que só descobrem algumas possibilidades, mas *todos* têm oportunidade de fazer alguma descoberta, de acordo com os seus conhecimentos e capacidades. Cabe ao professor acompanhar o trabalho dos alunos e ir fornecendo pistas de modo a que possam ir desenvolvendo, cada vez mais, o seu raciocínio indutivo e dedutivo.

Realça-se, aqui, a importância das sínteses finais em grande grupo, em que os alunos podem apresentar à turma o seu trabalho. Neste processo devem ser incentivados a verbalizar as descobertas que vão fazendo (por exemplo, *o número de molas necessárias é igual ao número de guardanapos mais um*).

Tanto a tarefa *Os trabalhos de Catarina* como *Mais guardanapos*, para além de permitirem a exploração de conceitos numéricos, são favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico, preparando os alunos para a aprendizagem da álgebra.

1.2.3 Estratégias

Para resolver qualquer problema, os alunos necessitam de ler (ou de quem lhes leia) o problema; compreender as quantidades e relações envolvidas; traduzir a informação em linguagem matemática, efectuar os procedimentos necessários e verificar se a resposta obtida é plausível.

Polya, (2003), descreveu um plano em quatro fases que pode ajudar a resolver um problema:

- compreender o problema;
- delinear um plano, ou seja, seleccionar uma (ou mais) estratégia(s);
- desenvolver esse plano;
- avaliar os resultados.

Embora este modelo tenha sido sugerido para problemas bastante mais complexos do que aqueles com que se trabalha no 1.º ciclo do ensino básico, as referidas fases são também úteis na abordagem de problemas simples. Nem sempre é fácil distinguir a segunda da terceira fase, já que à medida que se estabelece o plano este começa imediatamente a ser desenvolvido. Assim, pode-se considerar um modelo simplificado de resolução de problemas:

- ler e compreender o problema;
- fazer e executar um plano;
- verificar a resposta.

Vários investigadores, entre os quais Polya, identificaram um conjunto de estratégias que podem ajudar os alunos a atacar o problema ou a caminhar no sentido de obter a solução, adquirindo, simultaneamente, destrezas úteis na resolução de outros problemas. Acredita-se que se aprende a resolver problemas, sobretudo se se for persistente e disciplinado na forma de pensar e de estruturar o pensamento e se se for capaz de comunicar o que se pensou. Neste sentido, a familiaridade com o uso de estratégias irá permitir ao aluno passar gradualmente de uma situação fechada para outra mais aberta sem se sentir perdido. Estas estratégias podem ser aplicadas a muitos problemas, sós ou combinadas com outras. Algumas das estratégias, que podem ser utilizadas no ensino básico, são:

- Fazer uma simulação/dramatização;
- Fazer tentativas;
- Reduzir a um problema mais simples;
- Descobrir um padrão;
- Fazer uma lista organizada;
- Trabalhar do fim para o princípio.

Em combinação com estas estratégias recorre-se, muitas vezes, a diferentes representações como sejam *Fazer um desenho ou esquema* ou *Usar uma tabela*.

É importante distinguir o modelo de Polya das estratégias. O modelo proporciona uma visão geral de como nos devemos movimentar na resolução de um problema, enquanto as estratégias são ferramentas que, a maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas. O conhecimento matemático e as estratégias de raciocínio devem ser aprendidas e usadas em simultâneo e não isoladamente.

Apresentam-se, em seguida, exemplos de problemas cuja resolução é facilitada pelo recurso a uma ou várias das referidas estratégias.

Iogurtes

O André e o Bernardo foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas embalagens de cada tipo compraram os dois rapazes?

A estratégia a utilizar será *Fazer tentativas*. No entanto, estas tentativas não são feitas às cegas mas atendendo às condições do enunciado. Na primeira tentativa, podemos começar com o mesmo número para os dois tipos de embalagens e, face ao resultado, vamos ajustando os valores.

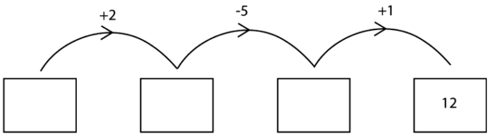
Total de embalagens	Embalagens de 4	Embalagens de 6	Total de iogurtes
12	6	6	6x4+6x6=24+36=70
12	8	4	8x4+4x6=32+24=56
12	7	5	7x4+5x6=28+30=58

Em conclusão, foram compradas sete embalagens de quatro iogurtes e cinco de seis iogurtes.

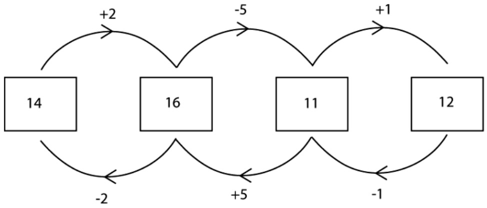
Os passageiros do autocarro

Um autocarro partiu da estação com alguns passageiros. Na primeira paragem entraram dois passageiros; na segunda saíram cinco e na terceira entrou um, tendo chegado ao destino doze passageiros. Quantos passageiros iniciaram a viagem?

Neste problema conhece-se a situação final e quer-se conhecer a inicial, logo usa-se a estratégia *trabalhar do fim para o princípio*. É também útil *fazer um esquema* onde se começa por identificar e relacionar os dados.



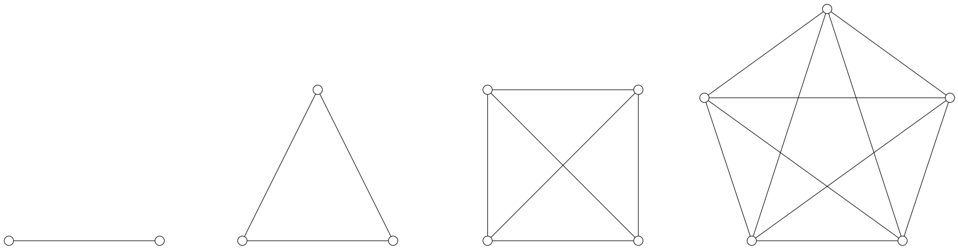
Seguidamente o esquema poderá ser preenchido do fim para o princípio, com recurso às operações inversas, o que permite chegar à situação de partida: iniciaram a viagem 14 passageiros.



Ginástica rítmica

Num número de ginástica as oito participantes devem ficar unidas duas a duas com fitas coloridas. Quantas fitas são necessárias para realizar o número?

Pode começar-se por *reduzir a um problema mais simples*, supondo que só há duas, três ou quatro participantes e determinar o número de fitas em cada caso. Com alunos mais novos será aconselhável fazer uma *dramatização* para determinar esse número ou, em alternativa, *fazer um esquema*.



2 participantes
1 fita

3 participantes
3 fitas

4 participantes
6 fitas

5 participantes
10 fitas

Pode, ainda, *fazer-se uma tabela* que relacione o aumento do número de fitas com o do número de participantes. Será importante que os alunos não necessitem de fazer todas as experiências até ao número pedido, mas que descubram um padrão que relacione o número de fitas com o número de participantes.

Número de participantes	Número de fitas
2	1
3	3=1+2
4	6=3+3
5	10=6+4

Este padrão pode incidir na relação entre o número de fitas em cada caso e o anterior número de fitas. No entanto, se o número de participantes fosse muito maior, esta descoberta não seria de grande ajuda, já que, para cada caso, temos que conhecer o que o precede. Mais eficaz seria o aluno procurar uma relação directa entre o número de fitas e o número de participantes.

Número de participantes	Número de fitas
2	1
3	3=1+2
4	6=3+3=1+2+3
5	10=6+4=1+2+3+4

A descoberta de uma relação deste tipo (observar tabela anterior) permite estabelecer a seguinte conjectura: o número de fitas necessárias para um número qualquer de participantes obtém-se adicionando os sucessivos números naturais desde 1 até ao número anterior de participantes.

Este problema pode, ainda, ser resolvido utilizando outra estratégia: *fazer uma lista organizada*.

Designando os oito participantes por A, B, C, D, E, F, G, H ter-se-á:

AB	BC	CD	DE	EF	FG	GH
AC	BD	CE	DF	EG	FH	
AD	BE	CF	DG	EH		
AE	BF	CG	DH			
AF	BG	CH				
AG	BH					
AH						

A cada par de participantes corresponde uma fita, donde se conclui que são necessárias 28 fitas.

Grande parte dos alunos consegue descobrir os seus próprios processos de resolução. Assim, o professor, em vez de ensinar prescritivamente um conjunto de estratégias de resolução de problemas, pode propor-lhes várias tarefas que favoreçam o aparecimento dessas estratégias. A sua posterior identificação e sistematização irão dotá-los de um reportório de estratégias que lhes permitirá resolver vários problemas diferentes ou o mesmo problema de modos diferentes. Por conseguinte, quando uma estratégia falha há sempre outra a que poderão recorrer, o que os ajuda a ganhar confiança na sua capacidade para resolver problemas. Neste contexto, os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, que são um meio para introduzir novos conceitos e que oferecem um contexto para usar e desenvolver diferentes capacidades. Deste modo, a resolução de problemas não é um tópico específico a ser ensinado mas um processo que deve permear toda a aprendizagem da Matemática.

1.3 Formulação de problemas

A par da resolução de problemas, a formulação de problemas é uma actividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas, é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso.

O papel do professor é significativamente diferente quando se trata de incentivar os alunos a resolverem ou a formularem problemas. Na resolução de problemas, é o professor quem, à partida, formula as questões, cabendo ao aluno responder às solicitações que lhe são feitas. Na formulação de problemas, o aluno é desafiado a problematizar situações do dia a dia usando a sua própria linguagem, vivências e conhecimentos. Neste âmbito, o professor deve dar especial atenção a vários aspectos. Um é usar as formulações apresentadas pelos alunos no sentido de as orientar para uma exploração matematicamente rica. Outro é saber aproveitar as situações que ocorrem na sala de aula, quer sejam provocadas ou ocasionais, para proporcionar actividades de formulação de problemas: um aniversário, uma visita de estudo ou a celebração de um Dia Mundial.

Suponha-se, por exemplo, que um aluno levou para a escola um prospecto de um novo armazém de artigos desportivos que tinha aberto na zona e que entusiasmou os colegas. Face a esta situação, o professor pode pedir aos alunos para formularem, em pares, um problema que utilize os dados do prospecto. Um outro ponto de partida, com fortes potencialidades educativas, pode ser solicitar aos alunos que formulem questões com base na tabela dos 100, apresentada em seguida.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Perante este desafio, saber colocar questões é vital. É, precisamente, esta característica que alguns autores usam para distinguir *problema de investigação* (Ernest, 1996). Se um aluno coloca a questão "Qual é o primeiro número da tabela?" e outro coloca a questão "Que diferença existe entre os sucessivos números de cada coluna?", o professor deve, com diplomacia, orientar a turma para a exploração desta última pois proporciona uma actividade matematicamente mais rica.

1.3.1 Estratégias de formulação de problemas

Há algumas estratégias que poderão ser úteis para facilitar o processo de formulação de problemas. Apresentam-se, em seguida, duas dessas estratégias: *E se em vez de*? e *Aceitando os dados*. A primeira, mais directamente relacionada com a modificação de problemas pelos alunos e a segunda com a criação de problemas.

E se em vez de?

A partir da informação que um determinado problema possui, identifica-se o que é conhecido (os dados, as propriedades ou atributos envolvidos), o que é pedido (o desconhecido, a resposta ou a solução) e as restrições que a resposta ao problema pode envolver. Modifica-se um ou mais destes aspectos e formulam-se perguntas que, por sua vez, poderão gerar mais modificações e mais perguntas.

Quando se trabalha no âmbito de conjuntos numéricos, mudar o domínio pode ser um modo interessante de ter novos problemas. A este propósito observe-se o seguinte exemplo que poderá ser utilizado com alunos a partir do 3.º ano: *Quais as dimensões que um terreno rectangular pode ter de modo a que a sua área seja 20 unidades?*

Se se trabalhar num papel quadriculado está implícito que as soluções serão apenas números inteiros. Com alunos com conhecimentos matemáticos mais profundos pode sugerir-se que abandonem as quadriculas e analisem onde isso os leva. Uma forma natural de o conseguir será partir de uma solução inteira, por exemplo 5x4, e passar a dimensão 4 para o dobro verificando que, para que se mantenha a área, a outra dimensão, 5, terá de passar para a metade. Aparece, assim, uma extensão do problema ao conjunto dos decimais e a busca de outras soluções nesse conjunto.

Outra possibilidade é o professor começar por sugerir a modificação de problemas que sejam familiares aos alunos. Considere-se o exemplo *Os queques da avó Bia*.

> ***Os queques da avó Bia***
>
> A avó Bia fez 12 queques para o lanche dos netos e amigos. Nesse dia estão apenas dois meninos e cada um come o mesmo número de queques. Quantos bolos come cada menino?

Este problema pode ser reformulado de diversos modos. A maneira mais simples será modificar o número de queques ou o número de crianças. Algumas das mudanças nos números não afectam a dificuldade do problema mas outras modificam-na (e.g. 18 queques para 6 crianças, ou 12 queques para 8 crianças ou ainda 10 queques para 3 crianças). Outras hipóteses de reformular o problema *Os queques da avó Bia* são torná-lo num problema mais aberto (exemplos 1 e 3), trocar o conhecido do problema pelo desconhecido (exemplo 2) em que deixámos de saber quantos são os queques mas sabemos quantos são os meninos, ou ainda mudar o contexto, mantendo a sua estrutura (exemplo 4). Na verdade a mudança de contexto de um problema é uma das estratégias mais utilizadas na sala de aula.

Ainda os queques da avó Bia

1. A avó Bia fez 12 queques para o lanche dos netos e amigos. Distribui-os, igualmente, por todos os meninos, mantendo-os inteiros. Quantos meninos é que, nestas condições, a avó Bia pode ter a lanchar?
2. Se hoje lancham 3 meninos e cada um come 2 queques, quantos queques é que a avó distribuiu?
3. A avó Bia fez muitos queques para o lanche dos netos e amigos. Ela distribui-os igualmente por todas as crianças, mantendo-os inteiros. Quantas crianças é que ela pode ter a lanchar nestas condições?
4. Doze amigos vão acampar e têm apenas 2 tendas disponíveis. Decidiram que ficaria o mesmo número de amigos em cada tenda. Quantos ficam em cada uma das tendas?

Quando se encorajam os alunos a responder a questões do tipo "e se em vez de ...?" ou "o que é que acontece se ...?" está-se também a incentivar a formulação de problemas e corresponde a uma fase que alguns autores chamam de *extensão do problema*.

Aceitando os dados

Solicitar aos alunos que *criem* os seus próprios problemas, é uma actividade também rica e interessante, mas que deve ser realizada apenas depois de terem alguma familiaridade, em etapas anteriores, como a modificação de problemas. De facto, a actividade de invenção sem um suporte prévio, pode levar os alunos a fantasiar, simplesmente, criando problemas sem nenhuma ligação à Matemática ou então propondo problemas tão complicados que nem os conseguem resolver. Deste modo, o professor deverá impor algumas regras e objectivos, recorrendo à utilização da estratégia que se designa por *aceitar dados*. Esta estratégia parte de uma situação estática, ou seja, de uma expressão, figura, tabela, definição, condição, ou simplesmente de um conjunto de dados ou informações, sobre os quais se formulam questões. Para a explorar, o professor pode recorrer e apresentar aos alunos situações ou informações em prospectos, jornais, livros, etc. Observem-se alguns exemplos.

Partindo de uma expressão

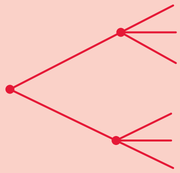
Inventa um problema que possa ser traduzido pela expressão

250: 5 = 50

Uma possibilidade de problema: *temos 250 g de rebuçados e queremos fazer 5 saquinhos para prendas com a mesma quantidade. Que peso deverá levar cada saquinho?*

Partindo de um diagrama

Constrói um texto que traduza uma situação de multiplicação que recorra ao diagrama em árvore.



Uma possibilidade de problema: *se tivermos dois tipos de papel, liso e estruturado, para fazer cartões e canetas de três cores, quantos cartões diferentes podemos construir?*

Partindo do dinheiro do João

Utiliza a informação seguinte para formulares um problema: O João tem algumas moedas no bolso:

3 moedas de 2 cêntimos

5 moedas de 10 cêntimos

6 moedas de 50 cêntimos

1 moeda de 1 euro

Uma possibilidade de problema: *o João poderá pagar 1,90 € sem receber troco? E 2,05 €? Se sim, de que maneiras?*

Quais das seguintes quantias poderá o João pagar sem receber troco? 1,90 €? 2,05 €?

Partindo de um horário de comboios

Com base no horário de comboios seguinte, inventa uma situação em que seja necessária a consulta do horário para a sua resolução.

Porto(Campanhã)	P		9.46									16.46		18.45					21.45		
Famalicão			10.18									17.18		19.18					22.18		
Braga	C		10.31									17.31		19.31					22.31		
Braga			6.04									13.04							18.04		20.04
Famalicão			6.19									13.19							18.19		20.19
Porto(Campanhã)			6.45									13.45							18.45		20.45

Uma possibilidade de problema: *o João mora no Porto e vai a Braga, de comboio, visitar os primos. Pensa almoçar lá e voltar no próprio dia. Escolhe os horários de comboios que deve utilizar de modo a ficar o maior tempo possível em Braga.*

Durante a sua prática lectiva, o próprio professor pode recorrer às estratégias *E se em vez de?* e *Aceitando os dados* com vários propósitos. Por exemplo, para promover extensões a um determinado problema, para adaptar problemas a determinados objectivos e contextos ou para simplificar ou enriquecer uma situação. Para avaliar a qualidade dos problemas formulados pelos alunos, pode usar como critérios, por exemplo, os atributos do problema, a estrutura do problema e qual a linguagem convencional usada pelo aluno.

1.4 Selecção e enriquecimento de tarefas

Já que o professor recorre com frequência ao manual escolar durante as aulas, é importante que o use de modo eficaz. A primeira condição é um bom conhecimento do programa e da articulação dos seus vários temas. Com essa base, deve analisar-se de que maneira os temas são abordados no manual e observar atentamente as tarefas propostas, questionando se com elas os alunos irão envolver-se activamente de modo a trabalhar as principais ideias matemáticas. Se não for caso disso, importa proceder a alterações.

No ensino da Matemática *através* da resolução de problemas, os problemas a apresentar não deverão ser usados apenas como contexto para aplicação de conhecimentos, mas também para introduzir ideias fundamentais. Os problemas seleccionados não necessitam de ser originais; muitos dos bons problemas são bastante simples. Por exemplo, se os alunos vão estudar a multiplicação, pode propor-se o seguinte: *Quantas folhas de cartolina vamos precisar de comprar se cada grupo precisa de três e na turma há cinco grupos?* Note-se que, se ainda não aprenderam a multiplicação, esta questão é realmente um problema para eles.

Contudo, o professor não pode limitar-se a este tipo de problemas fechados e muito circunscritos. É necessário dar oportunidade aos alunos de resolverem problemas mais abertos. Tradicionalmente, os manuais propunham essencialmente o que se designou por *problemas de cálculo* e esta tendência ainda se verifica com frequência. O professor poderá, então, adaptar muitos desses problemas de modo a elaborar tarefas com um maior grau de desafio. Está, assim, nas suas mãos a transformação do que pode designar-se por problemas tradicionais noutros mais abertos. De modo a ilustrar esta ideia, apresentam-se, em seguida, possíveis adaptações de problemas.

O aquário da escola

Comprou-se, para a escola, um aquário com a forma de prisma rectangular que tem de dimensões 50 cm de comprimento, 30 cm de largura e 20 cm de altura. Qual é o volume de água necessário para encher o aquário?

Adaptação de *O aquário da escola*

Os alunos da turma do João vão projectar um aquário com a forma de um prisma rectangular para o átrio da escola. Os peixes que estão a pensar lá colocar necessitam de 300 ℓ de água. Descobre as diferentes dimensões que o aquário pode ter. Escolhe depois a que consideras mais apropriada para o aquário da escola.

Cálculos

Calcula

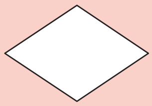
20x3	87+6	43–25	56:18

Adaptação de Cálculos

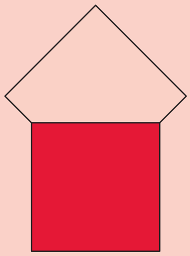
Usando quatro algarismos 4 e uma, ou várias, das quatro operações aritméticas, descobre um modo de obter 8.

Nomeando polígonos

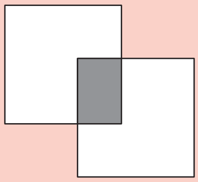
Indica o nome de um polígono com seis lados.

Indica o nome do seguinte polígono: 

Adaptação de *Nomeando polígonos*



1. Recorta dois quadrados geometricamente iguais. A figura mostra como podemos sobrepô-los de modo a formarem um polígono de sete lados. Descobre como se podem sobrepor os quadrados de modo a formarem polígonos de 4, 6 e 10 lados.



2. Se os quadrados forem transparentes podemos sobrepô-los como mostra a figura de modo a obter um rectângulo (parte sombreada). Descobre modos de sobrepor os dois quadrados de modo a obter um quadrado, um triângulo ou outras formas.

Os problemas abertos, de que as adaptações apresentadas são exemplos, são especialmente indicados para trabalho de grupo, sendo importante prever, no final, uma síntese feita com toda a turma, onde as ideias, os conceitos e as estratégias utilizadas são exploradas e os alunos têm oportunidade de clarificar os seus raciocínios e de compreender os dos outros.

A concluir

Embora a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, o trabalho na sala de aula, envolva necessariamente exercícios e actividades de memória e treino, ficaria, no entanto, incompleto, em todos os níveis, sem a resolução de problemas.

A resolução de problemas permite aprender de uma forma activa, ajudar os alunos a construírem conhecimento matemático novo e também testar os seus conhecimentos sobre os diversos temas de ensino. O professor deve seleccionar problemas relacionados com tópicos de Matemática do programa, com o nível dos alunos e com os objectivos pretendidos e estabelecer o tipo de trabalho adequado – individual ou colaborativo – de modo a proporcionar-lhes confiança nas suas possibilidades.

A selecção de problemas, pelo professor, deve subordinar-se às suas potencialidades para promoverem, nos alunos, o raciocínio e o pensamento sobre ideias e conceitos matemáticos. Os alunos devem ser encorajados a apresentar à turma as suas resoluções e a explicar porque acham que fazem sentido. Isto pressupõe que o professor os incentive a dar atenção à última fase do modelo de resolução de problemas proposto por Polya – avaliar os resultados – de modo a analisarem a sua razoabilidade no contexto do problema. Estes aspectos tornam os alunos mais sistemáticos nas suas explorações e facilitam o desenvolvimento de uma maior sensibilidade ao funcionamento e aplicabilidade dos conceitos matemáticos. Ao professor, dão uma visão mais consistente do pensamento dos alunos, permitindo-lhe avaliar o seu nível de conhecimento e de compreensão.

Em 1945, Polya escrevia que se aprende a resolver problemas resolvendo problemas. Os alunos perdem muito do entusiasmo e satisfação que provêm da discussão e justificação de ideias quando a Matemática fica limitada à aplicação do que lhes é apresentado. A actividade de resolução de problemas não deve ser esporádica. O importante é manter um ambiente de questionamento permanente entre o professor e os alunos.

No entanto, uma boa tarefa não basta. A sua exploração é fundamental e, neste processo, o professor é a peça chave. Tem que ter sólidos conhecimentos matemáticos para avaliar as respostas dos alunos e também os conhecimentos didácticos necessários quer para os orientar, quer para os questionar colocando em primeiro plano a reflexão e não o "fornecimento" de respostas.

O professor que proporciona aos alunos tarefas desafiantes e apropriadas ao seu conhecimento, está a proporcionar o estabelecimento de conexões entre vários tópicos dentro e fora da Matemática e a estimular a argumentação e a comunicação recorrendo a diferentes representações. Em suma, está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico, tão essencial a várias facetas da vida.

2 CONEXÕES MATEMÁTICAS

A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro.

Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre.

(Caraça, 1984)

2.1 Introdução

A tentativa de definir conexão leva, pelo senso comum, à ideia de uma ligação, de uma dependência, de algo que tem nexo e analogia com alguma outra coisa, um conceito, uma ideia, uma situação, um processo… Do ponto de vista da Didáctica da Matemática, as conexões matemáticas visam, por um lado, a criação e exploração de situações em que os alunos trabalhem a Matemática ligada a problemas da vida real – conexões com a realidade – e a outras áreas curriculares – conexões com Estudo do Meio, História, Língua Portuguesa (Literatura),… Visam, por outro lado, o destaque da relação entre tópicos ou temas matemáticos diferentes – conexões dentro da própria Matemática.

Estas ideias encontram eco quer no Programa de Matemática do ensino básico (Ponte et al., 2007), quer no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001). Em particular, neste último documento, pode ler-se:

> Uma componente essencial da formação matemática é a compreensão de relações entre ideias matemáticas, tanto entre diferentes temas de Matemática como no interior de cada tema, e ainda de relações entre ideias matemáticas e outras áreas de aprendizagem (a música, as artes visuais, a natureza, a tecnologia, etc.). As actividades que permitam evidenciar e explorar estas conexões devem ser proporcionadas a todos os alunos. Um aspecto importante será o tratamento e exploração matemáticos de dados empíricos recolhidos no âmbito de outras disciplinas, nomeadamente as áreas das Ciências Físicas e Naturais, a Geografia e a Educação Física. (M. E., 2001, p. 70)

A criança, quando chega à escola, possui, desde logo, um riquíssimo conhecimento informal, baseado numa grande diversidade de capacidades e numa enorme variedade de interesses. A sua curiosidade e entusiasmo para explorar o mundo que a rodeia leva-a, sem esforço, a penetrar nos conceitos elementares e a desenvolver capacidades matemáticas. Por isso, muitas teorias sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, tendem a valorizar a natural motivação das crianças e a sublinhar a importância de, desde o jardim de infância, serem agentes activos da sua própria aprendizagem.

Como tal, tornar a Matemática viva para os alunos, nos primeiros anos do ensino básico, pressupõe tarefas que simultaneamente reflictam contextos significativos e a integridade dos conteúdos matemáticos (Schwartz, 1995). O desafio para os professores é, portanto, propor tarefas que se adaptem aos interesses dos alunos e estimulem a sua aprendizagem Matemática.

Ao longo deste capítulo, procurar-se-á ilustrar o significado de estabelecer conexões matemáticas, encaradas sob diferentes perspectivas. Considerar-se-á conexões com a vida real em situações ligadas quer à Geometria, quer aos Números. Ter-se-á, também, em conta conexões com outras áreas curriculares, através de tarefas ligadas às do 1.º ciclo do ensino básico. Por último, focar-se-á conexões dentro da própria Matemática, com exemplos que ligam a Geometria tanto ao Número como à Medida, e que ligam também, entre si, as diferentes operações aritméticas elementares, através da exploração de algoritmos pouco usuais nas escolas.

2.2 Conexões com a vida real

Ligar a Matemática à vida real permite realçar a sua importância no desenvolvimento da sociedade actual, quer do ponto de vista científico, quer social.

Para desenvolver, na sala de aula, conexões com a realidade, as experiências anteriores dos alunos e os seus focos de interesse são uma óptima fonte de trabalho. Na verdade, são imensos os exemplos de actividades que os alunos fazem ao longo de todo o dia e que podem ser explorados do ponto de vista das conexões com a Matemática.

No início do 1.º ciclo, as crianças conhecem, normalmente, o caminho de casa à escola e vice-versa. Sabem por onde ir se forem a pé, de bicicleta ou até de automóvel, e reconhecem pontos de referência ao longo do percurso. No entanto, isto não significa que consigam explicar como ir de um lugar ao outro e, frequentemente, têm dificuldades em indicar, do local em que se encontram, em que direcção fica a sua casa. Mesmo conhecendo a sua vizinhança, nesta faixa etária, não têm ainda uma boa visualização da sua estrutura global.

A orientação é uma componente importante que leva à compreensão do espaço e um dos seus aspectos fundamentais é a localização (Heuvel-Panhuizen e Buys, 2005). Apresentam-se, de seguida, situações ilustrativas que permitem desenvolvê-la. As tarefas escolhidas, sendo de complexidade crescente, pretendem fomentar a ligação do aluno, nos primeiros anos de escolaridade, ao exterior da escola, isto é, ao espaço em que diariamente se movimenta, à realidade envolvente.

A vila dupla

São necessárias duas cópias do mapa de uma vila imaginária, como, por exemplo, o apresentado na figura 1.

Dois alunos sentam-se a uma mesa, frente a frente e separados por uma divisória, para que não seja possível verem o mapa um do outro.

Um coloca no seu mapa, vários objectos, tais como, casas, lojas, paragens de autocarro, sinais de trânsito, árvores, etc. De seguida, dá indicações sobre a localização de cada um dos objectos, ao colega. Baseado na informação recebida, este tem de reproduzir, no seu mapa, a vila criada pelo seu par.

Por fim, ambos confrontam e analisam as suas vilas.

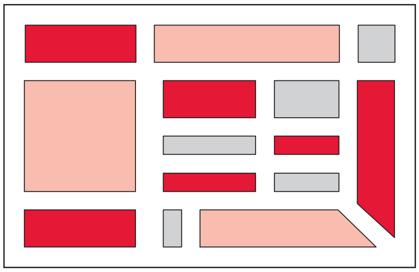


Figura 1 – Mapa da vila

Note-se que, dependendo dos alunos a que a tarefa se destina, assim o mapa da vila pode ser mais simples ou mais complexo.

Num momento posterior, os alunos podem desenvolver itinerários fictícios, circulando, nomeadamente numa grelha (exemplo, *O taxista*) ou itinerários reais trabalhando, por exemplo, no mapa da localidade onde residem (exemplo, *Às voltas na cidade*).

> ***O taxista***
>
> Neste jogo, os alunos trabalham em pares e os táxis circulam em grelhas como a da figura 2.
>
> Um aluno pensa num percurso para o táxi e, oralmente, informa o colega por onde é que o taxista deve seguir. Posteriormente, os alunos, em conjunto, verificam se o táxi percorreu o caminho certo. Depois de cada viagem trocam de papéis. Após terem realizado cinco voltas, o jogo termina e é vencedor aquele que obtiver um maior número de percursos correctos.
>
> Como é óbvio, os alunos devem dar indicações claras ao colega.

Antes de o jogo começar, o professor pode discutir com toda a turma uma forma simples e eficiente de indicar o caminho. Por exemplo, podem ser usadas letras para designar as direcções: D (direita), E (esquerda), C (para cima), B (para baixo). Desta forma, DCCDCD representa o percurso assinalado na figura 2, ou seja, deslocar-se uma unidade para a direita, seguir duas unidades para cima, uma unidade para a direita, outra para cima e outra para a direita.

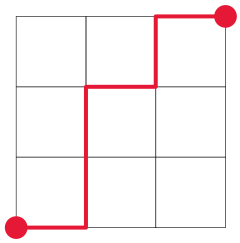


Figura 2 – Grelha

A tarefa *Às voltas na cidade* poderá proporcionar um contexto favorável ao envolvimento dos alunos em actividades ligadas ao real e, concretamente, à localidade onde vivem.

> ***Às voltas na cidade***
>
> Considere-se o mapa da cidade de Portalegre (figura 3).
>
> O professor, numa parceria com cada aluno, pode identificar:
>
> - *Pontos estratégicos*: a escola, situada na Praceta João Paulo II; a Sé; a Casa Museu José Régio; a casa do aluno,...;
> - *Percursos de um sítio a outro*: ir da Praceta João Paulo II até à Central Rodoviária, considerando diferentes caminhos possíveis e, de entre eles, escolher o mais curto;
> - *Percursos de um sítio a outro, com paragem obrigatória*: ir do Rossio até ao Estádio Municipal e, pelo caminho, colocar uma carta no correio.

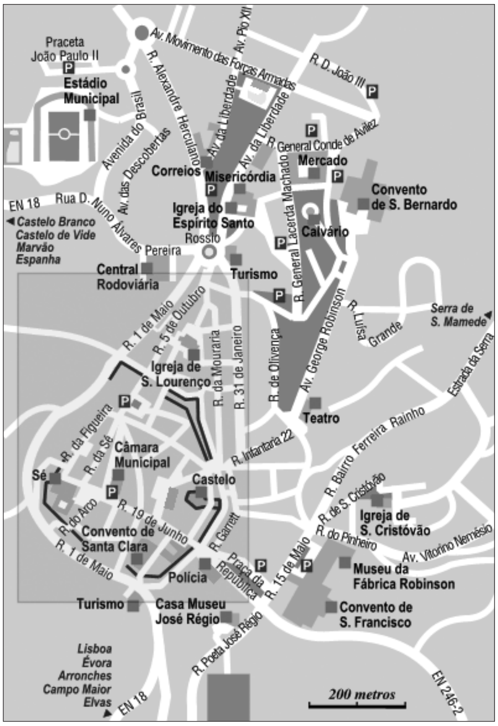


Figura 3 – Mapa da cidade

Tarefas deste tipo podem, pois, ter um papel importante para desenvolver nas crianças referenciais de orientação e levá-las, cada vez mais, a uma certa autonomia nas suas deslocações.

Desta forma, ilustrou-se a ligação da realidade com a Matemática e, mais especificamente, com a Geometria. De seguida, e ainda na ligação com o real, pode levar-se os alunos a desenvolver o *sentido do número* explorando situações do dia a dia, como é o caso das compras. Escolhe-se uma situação que esteja ligada a algo do seu interesse. O clube onde praticam desporto e a gestão das respectivas despesas e receitas, pode originar exemplos como o que a seguir se apresenta.

> ***Equipamento. Precisa-se!!...***
>
> As equipas de futebol do clube precisam de caneleiras novas e de luvas para os guarda-redes. Se as caneleiras custarem 9 € e as luvas 15 €, que equipamento se pode comprar de forma a gastar menos de 100 €?

Os alunos gostam que os adultos os considerem responsáveis e, como tal, perante esta tarefa, podem, se bem encaminhados, apresentar e explorar várias soluções para o problema proposto e ter uma palavra perante o caso real que estão a estudar. É importante que organizem o seu trabalho de forma a encontrarem todas as compras possíveis que cumpram a condição exigida inicialmente. A tabela de dupla entrada (tabela 1) onde, por exemplo, as linhas correspondem ao número de luvas e as colunas ao de caneleiras, permite encontrar todas as combinações. Isto é, permite que os alunos encontrem todas as soluções e, perante a realidade vivida no clube (número de participantes, estado do equipamento já existente,…), optem pela melhor.

Número de caneleiras

Número de luvas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0 €	9 €										
1	15 €											
2				57 €								
3												
4												
5												
6												

Tabela 1

O primeiro passo é preencher a tabela com os valores totais (em Euros) do custo das várias luvas e caneleiras. As quatro células preenchidas são apenas um mote para algumas questões no sentido de os alunos explicarem, não só o que está apresentado, mas também a maneira como pensam encontrar os valores de cada célula. Discutir as regularidades da tabela ajuda e simplifica o seu preenchimento. Tanto ao nível das linhas, como das colunas, existe uma sequência aritmética que pode ser explorada. O professor deve, então, colocar questões, quer para saber a solução da situação real, quer para proporcionar uma análise cuidada do processo de preenchimento efectuado pelo aluno: "*Repara na primeira linha. O que notas? E, acerca da primeira coluna, o que podes dizer? Como encontraste os diferentes valores, ao longo de uma linha? E de uma coluna? Porque será que a tabela tem 7 linhas e 12 colunas?*"

Os valores indicados neste exemplo são verídicos. No entanto, este tipo de tarefa adapta-se a outros números (decimais ou inteiros) e, se o professor assim o entender, permite a utilização da calculadora como instrumento facilitador dos cálculos.

2.3 Conexões com outras áreas

Nas conexões com outras áreas curriculares, os conceitos ou os procedimentos devem ser encarados não só do ponto de vista matemático, mas também das áreas em questão. O respeito pela especificidade de cada uma, nomeadamente a nível da linguagem, é essencial para a compreensão dos alunos.

2.3.1 Conexões com a Literatura Infantil

Os padrões frequentemente presentes na Literatura Infantil podem ser o ponto de partida para o estabelecimento de conexões com a Matemática. Com efeito, a exploração de padrões permite aos alunos aprender, por um lado, a reconhecer relações e a estabelecer ligações, generalizações e previsões e, por outro lado, a resolver problemas que lhes permitam relacionar novas situações com outras que já dominam, e com isso, enriquecer as suas experiências anteriores (NCTM, 1998).

No livro *Histórias pequenas de bichos pequenos* (Magalhães, 1988), surgem alguns exemplos que suscitam a ligação da Literatura Infantil à Matemática. Considere-se o caso da *Centopeia*, no qual, com alguma imaginação, se pode relacionar o conceito cardinal do número com uma história.

A proposta é que o professor peça aos alunos para se concentrarem no número de sapatos que o bichinho calça, o que poderá levar a desafios de cálculo e também a curiosas terminologias. Poderá colocar questões do tipo:

Como designarias o bichinho se apenas calçasse 98 sapatos? Que relação tem o número de sapatos da centopeia com o da cinquentopeia? Se a centopeia calçasse apenas um quarto das suas patas, de quantos sapatos precisaria? Que nome lhe darias? A centopeia já calçou 35 patas quantas lhe faltam calçar para poder ir passear?...

Centopeia

Era uma vez uma centopeia muito simpática que eu conheci nas férias da Páscoa. Convidei-a várias vezes para jantar mas ela nunca aparecia. Quando acabava de apertar os cordões do centésimo sapato do centésimo pé, já eram horas de começar a desapertar os do primeiro para se ir deitar.
Um problema! Quando calçava só cinquenta sapatos tinha tempo de sair para tomar um café ou um sorvete; mas nesses casos, como ela mesmo dizia, lamentando-se, não passava de uma *cinquentopeia*.
Uma vez passei por ela na rua e era uma *quarenta-e-setepeia*. Ia tão envergonhada que eu fiz de conta que não a vi.

Sugere-se, portanto, a colocação de várias questões que proporcionem, não só o trabalho com diferentes números e suas relações, mas também o desenvolvimento do cálculo mental, tendo por suporte uma história, o que, normalmente, é do agrado dos mais novos. A ligação com novas palavras pode também levar a diálogos interessantes para justificar alguns dos nomes fictícios.

Na história *Pulga,* a ligação da Literatura Infantil à Matemática, é feita, desta vez, pelo padrão que a própria escrita proporciona.

Pulga

Era uma vez uma pulga que eu tinha, a qual, por acaso, também tinha uma pulga que, por sua vez, tinha outra pulga. Parece que esta última ao princípio não tinha, mas depois também apanhou uma pulga.

A verdade é que quando eu coçava a minha pulga, a pulga coçava também a pulga dela. E a pulga da pulga também. E a pulga da pulga da pulga também. E a pulga da pulga da pulga da pulga também. E …

As reticências finais convidam à continuação da história, o que o professor pode solicitar aos alunos. Aqui não é feita nenhuma referência explícita aos números. No entanto, a escrita do próprio texto pressupõe a existência de um padrão de crescimento e de uma sequência numérica, também ela crescente. Repare-se que, na construção das frases de continuação da história, se evidenciam três palavras, que dão origem ao padrão: o artigo definido – *a* –, a contracção da preposição de com o artigo definido a – *da* – e o nome – *pulga*. É apenas com estas três palavras que se pode continuar a história, de uma forma simples e directa.

O número de vezes que a palavra *pulga* aparece em cada frase leva à sequência dos números naturais maiores que 1, onde a regra é adicionar 1 a cada termo para obter o termo imediatamente a seguir. Da mesma forma, o número de vezes que surge a palavra *da*, corresponde à sequência dos números naturais: 1, 2, 3, 4, 5,… e a regra é a mesma.

A pulga da pulga	2
A pulga da pulga da pulga	3
A pulga da pulga da pulga da pulga	4
A pulga da pulga da pulga da pulga da pulga	5
A pulga da pulga da pulga da pulga da pulga da pulga	6
…	…

Por último, tenha-se em atenção o *Hino do Arco-Íris* da autoria de Maria Alberta Menéres e António Torrado (Rocha, 1900). O professor pode solicitar aos alunos a sua leitura individual ou em grupo e, posteriormente, incentivar a que continuem o poema, dando largas à imaginação e respeitando a lógica dos poetas. No final, podem ser apresentadas e discutidas as várias sugestões e escolhida aquela que a turma considerar mais interessante.

O professor pode começar por sugerir aos alunos que representem, numa tabela de dupla entrada, os números que são mencionados em cada uma das quatro quadras: cada coluna corresponde a um verso e cada linha a uma quadra (tabela 2).

Hino do Arco-Íris

Sete cores, setenta e sete
voltas do nosso girar,
mais de sete mil e sete
voltas havemos de dar.

Sete cores, setenta mil,
não há cores que tenham par,
poisamos em cada coisa
o tom que lhe queremos dar.

Sete cores, setenta e sete
voltas do nosso girar,
quem nos quiser conhecer
tem que ver mais do que olhar.

Sete cores, setenta mil,
setecentas mil talvez
Maneiras de ser subtil.
Cada cor, era uma vez.

	1.º verso		2.º verso	3.º verso	4.º verso
Quadra A	7	77		7 007	
Quadra B	7	70 000			
Quadra C	7	77			
Quadra D	7	70 000	700 000		

Tabela 2

Perante esta tabela, pode reparar-se que, no primeiro verso de todas as quadras, está o 7. Também no primeiro verso, mas surgindo alternadamente, nas quadras A e C e nas quadras B e D, estão, respectivamente, o 77 e o 70 000. No segundo verso só na quadra D aparece o 700 000. No terceiro verso surge o 7007 mas somente na quadra A e, no quarto verso, não há referências a quaisquer números. Desta forma, se o objectivo é não só identificar o padrão numérico, mas também continuar a poesia, deve notar-se, que dependendo do número de quadras a incluir, assim se pode seguir um ou outro padrão, desde que devidamente justificado.

Um processo de construção pode ser, em primeiro lugar, o de estender a tabela anterior, com vista a uma melhor visualização do padrão numérico e, numa fase posterior, o de descobrir as rimas adequadas. Assim, ao mostrar apenas o padrão numérico, percebe-se que houve uma repetição da regularidade apresentada. É a situação mais directa.

Pode, no entanto, indicar-se um outro padrão e evidenciar, por exemplo, quantos números existem em cada quadra. Ao observar a tabela 2, constata-se que há três números na primeira, dois na segunda, dois na terceira e três na quarta, ou seja, pode identificar-se um padrão de repetição, em que a unidade padrão pode ser do tipo 3, 2, 2, 3 ou 3, 2, 2. Assim, pode repetir-se a unidade e os números serem escolhidos de forma a jogar-se com a respectiva ordem de grandeza. Tudo depende da imaginação que se tem e da ideia que se defende.

Nesta tarefa, o importante, para além da análise e construção de padrões, é dar largas à criatividade e fazer rimar os versos para que a lógica do poema não desapareça. Veja-se *Continuação do Hino do Arco-Íris*, uma possibilidade apresentada por um professor do 1.º ciclo.

Explorar o poema é um trabalho que pode ser desenvolvido ao longo de várias aulas e, dependendo do ano de escolaridade e dos alunos a que se destina, ser mais ou menos aprofundado.

Continuação do Hino do Arco-Íris

(...)
Sete cores, setenta e sete,
voltas no nosso girar,
o sol só já pensa ir
nas dobras do teu olhar

Sete cores, setenta mil
sete milhões de promessas,
maneiras de ser gentil
d'um roteiro às avessas.

Sete cores, setenta e sete,
Voltas no nosso girar,
(...)

Zeca Freire, 2007

2.3.2 Conexões com o Estudo do Meio – Ciências da Natureza

Uma das formas de ir ao encontro dos objectivos referidos na Introdução deste capítulo, é desenvolver e explorar um modelo de currículo integrado, em que a diversidade de tarefas permite ao aluno efectuar conexões entre os conceitos e os acontecimentos observados, e as ideias abstractas que explicam as relações entre eles. Estas tarefas podem incluir, entre outras:

- investigações com materiais concretos;
- leitura de literatura e recolha de informação através de narrativas, fotografias, gráficos e mapas;
- análise, interpretação e divulgação de resultados;
- jogos.

Durante a Primavera, as crianças começam a notar a renovação da vida das plantas. Uma série de situações relacionadas com este facto pode então ser explorada: efectuar pequenos passeios pelo campo ou nos jardins mais próximos; planear a compra de plantas no mercado; ler histórias sobre jardinagem ou agricultura; e falar com jardineiros experientes.

Apresentam-se, de seguida, tarefas, com graus de dificuldade diferentes, que permitem explorações em conformidade com o nível de compreensão e desenvolvimento das capacidades dos alunos a que se destinam. A primeira tem por objectivo a concepção e desenvolvimento, pelos alunos, de um projecto de plantação que envolva a germinação de sementes e bolbos. Recomenda-se que o trabalho se realize em pequenos grupos, onde cada um tem um papel a desempenhar e responsabilidades a assumir.

Germinação de sementes e bolbos

No início, os alunos discutem e definem como distribuir os materiais necessários para o *projecto de plantação*.

Depois, para medir e apontar o crescimento das plantas, os alunos devem seleccionar possíveis instrumentos de medição, com unidades de comprimento não normalizadas (por exemplo: uma palhinha ou uma tira de papel); ou réguas, com unidades de comprimento normalizadas (por exemplo: centímetro).

Por fim, ao registar as observações em desenhos, mapas, gráficos e ao usar símbolos, os alunos estabelecem um suporte visual que lhes permite pensar e discutir a relação entre o decorrer do tempo e o crescimento das plantas.

Ao longo do projecto, o professor pode ir colocando perguntas que levem os alunos a pensar matematicamente sobre o que estão a fazer: *Quantas sementes deve ter cada um, se todos tiverem o mesmo número?*

Uma situação mais complexa pode envolver, implicitamente, a multiplicação e a divisão: *Ao pretender que cada aluno tenha 5 sementes e sabendo que em cada pacote há 20 sementes, quantos pacotes precisamos de comprar?*

No final, as perguntas podem suceder-se, sem qualquer constrangimento: *Qual é a diferença entre a altura destas duas plantas? Comparando a altura da planta hoje, com a da última segunda feira, quantas unidades de comprimento tem a mais? Como é que se pode identificar qual das plantas cresceu o mesmo, em cada semana? Quanto é que achas que a planta vai crescer entre hoje e a próxima sexta-feira?*

A segunda tarefa aparece, mais uma vez, num contexto real de aprendizagem, numa outra área curricular. Recomenda-se que surja de um diálogo conjunto entre alunos e professor, onde este lança enigmas que apelam ao conhecimento sobre como vivem e se movimentam os animais, fazendo a ligação à Matemática.

Quais são os animais?

Existem dois animais no lago, com um total de quatro pernas. Que animais poderão ser?

Existem três animais no lago, com um total de oito pernas. Que animais poderão ser?

A primeira questão exemplifica um problema simples que leva, na sua resposta imediata, à selecção de dois animais com o mesmo número de pernas – um rapaz (2 pernas) e uma rapariga (2 pernas). Encorajando os alunos a discutirem entre si, rapidamente descobrem que existem outras soluções – um cão (4 pernas) e um peixe (0 pernas). A segunda questão é mais complexa porque leva os alunos a raciocinar sobre um maior número de animais e de pernas, mas novamente a multiplicidade de possíveis respostas é um incentivo à participação: dois patos (2x2 pernas) e um cão (4 pernas); dois patos (2x2 pernas) e uma rã (4 pernas); dois cavalos (2x4 pernas) e um peixe (0 pernas)...

Mais tarde, o professor pode propor que os alunos inventem enigmas para os colegas e que os apresentem no boletim da escola, de forma a criar mais oportunidades para a resolução de problemas e a discussão das soluções.

Com tarefas como as apresentadas, o professor pode, de forma motivadora, desenvolver nos seus alunos, conceitos tão elementares como contar, juntar, separar, comparar, multiplicar e dividir e capacidades tão necessárias, como medir, recolher e analisar dados e resolver problemas.

2.3.3 Conexões com a Expressão Musical

A expressão musical tem como ponto fulcral o estudo de sons e ritmos. Explorar as características dos sons – *intensidade* (fortes e fracos), *duração* (longos e curtos), *altura* (graves e agudos) e *timbre* (modo de produção) – pode originar boas ocasiões para, mais uma vez, trabalhar os padrões (Moreira & Oliveira, 2003). Considere-se, então, a tarefa *As palmas da tabuada*.

> ***As palmas da tabuada***
>
> Dois alunos contam juntos, oralmente, do 1 até ao 20, e vão batendo as palmas para cada número, com mais força e voz mais forte nos números da tabuada do 2 e suavemente nos restantes.
>
> De seguida, os alunos percorrem os números do 1 até ao 30 e vão bater as palmas à tabuada do 5. Ou seja, sempre que passarem por um múltiplo de 5, batem as palmas com mais força e dizem-no em voz bem alta, enquanto que nos outros números o fazem calmamente.

Perante esta *música da tabuada*, o professor pode colocar diversas questões: *Se um de nós bater as palmas à tabuada do 2 e outro à do 5, em simultâneo, são capazes de imaginar o que irão ouvir? Quais serão os números calmos? Quais serão os números ruidosos? Quais irão ser os mais barulhentos?*

Perante as respostas dos alunos, pode haver necessidade de voltarem a bater as palmas, para se certificarem se as suas hipóteses estavam, ou não, correctas. Posteriormente, poder-se-á escolher outras tabuadas e repetir os procedimentos descritos, tendo sempre em mente que os alunos devem antecipar o que irão ouvir, antes de baterem as palmas.

É comum que a exploração dos sons seja acompanhada de movimento e que ambos sejam registados, o que leva à criação de padrões escritos. Desta forma, a tarefa apresentada pode enriquecer-se se for acompanhada de um registo, no quadro. Ao utilizar um conjunto de símbolos que traduza o que se foi fazendo (= bater palmas levemente; ▶ bater palmas com força) e, em simultâneo, numa linha abaixo, ao escrever a sequência dos números naturais, os alunos relacionam-se não só com o conceito de múltiplo de um número, mas também com o de múltiplo comum de dois naturais e, até mesmo, com o conceito de mínimo múltiplo comum de dois naturais.

Palmas na tabuada do 2:

=	▶	=	▶	=	▶	=	▶	=	▶	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

Palmas na tabuada do 5

=	=	=	=	▶	=	=	=	=	▶	=	=	=	=	▶	=	=	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...

Tendo, ainda, em mente a produção de sons, apresenta-se uma tarefa onde se utiliza alguns instrumentos musicais, como por exemplo, um *tambor* (clap) e uns *ferrinhos* (click), em substituição das palmas ou do bater noutras partes do próprio corpo.

Música para os nossos ouvidos

1. O João inventa e toca uma sequência de sons: clap, clap, click, clap, clap, click, clap, clap, click, clap, clap, click,…

   O que estará a tocar na 15.ª batida? E na 20.ª? E na 99.ª? E na 100.ª?

   Como se pode encontrar a resposta, sem efectivamente tocar?

2. Dois alunos, em simultâneo, começam a tocar ao mesmo tempo, mas com ordenações rítmicas diferentes, até que estejam sincronizados, isto é, a tocarem na mesma pulsação:
   Aluno A: clap, clap, click, clap, clap, click,…
   Aluno B: click, clap, clap, click, clap, clap, click, clap, clap,…

   Quando é que ambos tocam click em simultâneo? Porquê?

   Existirão outras situações em que tocar clap e click, originam respostas semelhantes à anterior?

   Como é que se podem alterar as ordenações rítmicas de forma a que o som click surja em simultâneo? Como prever quando isto acontece?

Nestas situações, os alunos têm de perceber que há um conjunto de sons que se repete e que, portanto, o que interessa é saber quantas vezes esse número de sons está num determinado valor, isto é, interessa efectuar a divisão inteira e interpretar o respectivo resto. Por exemplo, se se quiser saber o que o João estará a tocar na 100.ª batida, basta considerar o resto da divisão inteira de 100 por 3, ou seja, 1. Assim, o som desta batida será o primeiro da sua sequência de sons (clap).

Tarefas deste tipo podem tornar a Matemática "viva" para os alunos, reforçar-lhes a compreensão de conceitos essenciais, criar-lhes predisposição e motivação para a aprendizagem e despertar-lhes o gosto pela própria Matemática.

2.4 Conexões dentro da própria Matemática

No campo estrito da Matemática, devem ter particular destaque as conexões que quebrem o isolamento de temas matemáticos e que relacionem representações matemáticas equivalentes e respectivos processos. Uma visão da Matemática como um todo interrelacionado permite que os alunos tenham menos tendência a considerar os procedimentos e os conceitos matemáticos separadamente. A Matemática pode deixar, assim, de ser encarada como um conjunto arbitrário de regras, muitas vezes sem sentido para os próprios alunos. A ideia de que os conceitos matemáticos estão interligados deve permear a experiência matemática dos alunos de qualquer nível de ensino, pois quando aprendem os conceitos e os procedimentos de forma isolada, ficam com uma visão restritiva da Matemática e perdem a essência desta ciência (NCTM, 2000).

Nos primeiros anos de escolaridade, a conexão mais importante para o desenvolvimento matemático dos alunos é entre uma matemática informal, aprendida por experiências da própria vida, e uma Matemática que se aprende na escola e que, progressivamente, se vai tornando cada vez mais formal.

De entre as inúmeras conexões que se podem considerar na Matemática, foca-se, em seguida, as que ligam as áreas temáticas do 1.º ciclo do ensino básico: Geometria, Números e Medida.

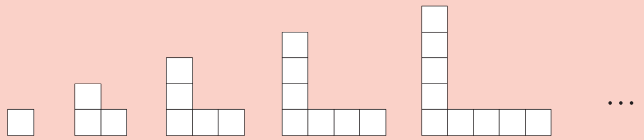
2.4.1 Conexões entre Geometria e Número

Os alunos podem, por exemplo, ser encorajados a olhar e observar o que os rodeia, no dia a dia, por forma a que consigam encontrar padrões – no papel de embrulho, na calçada, no tapete,... –, os identifiquem, descrevam e desenhem. O reconhecer destes padrões envolve conceitos como a forma, a cor, o tamanho e o número. Deste modo, a observação de padrões e as respectivas representações geométricas e/ou numéricas permitem, desde os primeiros anos de escolaridade, estabelecer conexões entre Geometria e Número.

Os números podem ser representados de diversas formas. Uma das mais simples é a descoberta de padrões, por exemplo, na disposição de pedras ou quadrados (apenas válido para números naturais). Considere-se, então, duas situações interligadas, que levam à exploração de algumas curiosidades sobre os números naturais ímpares, com o auxílio de uma das suas representações geométricas.

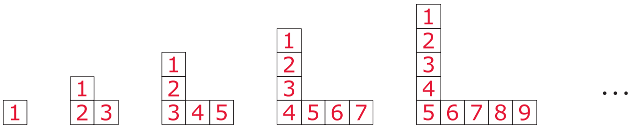
Os números ímpares

Sabendo que cada □ representa a unidade, identificar os números a seguir indicados:

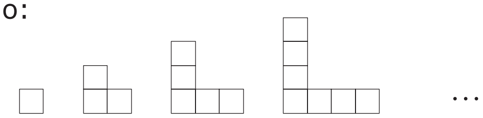


Para responder a esta questão, basta simplesmente contar os quadrados que se encontram em cada figura. No entanto, o professor deve estar atento aos diferentes processos de contagem, apresentados pelos alunos, que evidenciam, por si só, diferentes graus de sofisticação na relação com os números. A simples contagem um a um é um processo que se pode tornar moroso e demasiado cansativo à medida que se avançam nos termos da sequência. Como tal, o professor e os alunos devem tornar essa contagem mais sofisticada, com vista, não só à rapidez de obtenção da resposta, como também à tentativa de obtenção de uma generalização.

Desta forma, e por um processo de contagem um a um, surge a resposta pretendida: 1, 3, 5, 7, 9,…



O professor pode realçar a relação entre a sequência de figuras e a sequência numérica, isto é, ir escrevendo:



1 3 5 7 ...

Pode, também, desafiar os alunos a analisar com mais cuidado a sequência das figuras, de modo a concluírem que o próximo termo se obtém juntando ao anterior dois quadrados, um na vertical e outro na horizontal, o que equivale, na sequência numérica, a adicionar dois ao termo anterior. Em simultâneo, pode, ainda, evidenciar qual o tipo de números naturais que assim estão representados – *os números ímpares*.

É interessante mencionar que, se os alunos refinarem o processo de contagem dos quadrados de cada termo da sequência (auxiliados, ou não, pelo professor), além de chegarem mais rapidamente à resposta, conseguem avançar para expressões numéricas cujo padrão pode levar, mais tarde, à generalização e, como tal, à expressão geral dos números naturais ímpares ($2n - 1$, em que n é um número natural qualquer). Concretamente, numa primeira etapa, os alunos podem, por exemplo, reparar que na vertical e na horizontal existe o mesmo número de quadrados logo, basta registar, para cada termo da sequência, uma adição de parcelas iguais, como se ilustra na tabela 3.

Termo	**Soma**
1.º	1+1=2
2.º	2+2=4
3.º	3+3=6
4.º	4+4=8
5.º	5+5=10
…	…

Tabela 3

Ou ainda, utilizar uma estratégia multiplicativa que substitua a aditiva anterior, e ficar com uma tabela do tipo da indicada (tabela 4), que o professor pode aproveitar para salientar que se está, agora, perante a sequência dos *números pares*: 2, 4, 6, 8, 10,...

Termo	Produto
1.º	2x1=2
2.º	2x2=4
3.º	2x3=6
4.º	2x4=8
5.º	2x5=10
...	...

Tabela 4

Numa segunda etapa, os alunos devem aperceber-se de que há um quadrado que é contado duas vezes (o quadrado do canto, tanto está na horizontal como na vertical) logo, deve retirar-se um quadrado, em cada termo da sequência (tabela 5).

Termo	Expressão
1.º	(1+1)–1=2–1=1
2.º	(2+2)–1=4–1=3
3.º	(3+3)–1=6–1=5
4.º	(4+4)–1=8–1=7
5.º	(5+5)–1=10–1=9
...	...

Tabela 5

E, se tiver em atenção a operação multiplicação, obtém-se as expressões numéricas da tabela 6.

Termo	Expressão
1.º	2x1–1=1
2.º	2x2–1=3
3.º	2x3–1=5
4.º	2x4–1=7
5.º	2x5–1=9
...	...

Tabela 6

A análise das expressões numéricas da coluna da direita permite referir que: o primeiro factor é constante (2); o segundo vai variando de acordo com a posição do termo da sequência que se considera; e o subtractivo é também constante (1). Identifica-se, assim, uma regularidade que, de uma forma intuitiva, leva à fórmula geral dos números naturais ímpares, onde *n* coincide com a posição nos termos da sequência: *2n–1, n número natural qualquer*.

O professor pode dialogar com os alunos no sentido de perceber se eles estão, ou não, a seguir um raciocínio correcto, colocando questões relacionadas com os padrões anteriores, como por exemplo: *Como é a figura que está na 20.ª posição? Quantos quadrados tem? Tenho uma figura com 21 quadrados, qual a sua posição na sequência?*

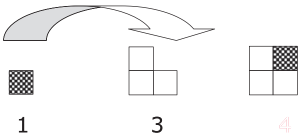
Ao admitir que, na perspectiva das conexões, os novos conceitos matemáticos são encarados como extensões dos anteriores e que os alunos aprendem a utilizar conhecimentos já adquiridos na exploração de novas situações, está-se em condições de lhes propor, então, mais um desafio, que tem um importante lugar na História da Matemática, nomeadamente na escola pitagórica.

A soma dos primeiros números ímpares

Tendo em atenção a sequência anterior (sequência que representa os números naturais ímpares), explorar o que acontece quando, sem alterar a forma dos elementos, se juntam os dois primeiros elementos; os três primeiros; os quatro primeiros...

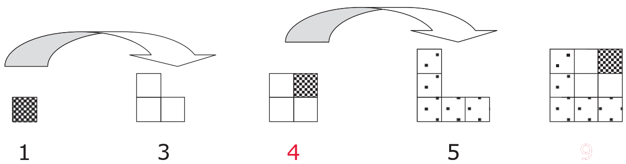
Os alunos devem ser incentivados a identificar a figura geométrica que surge em cada uma das respostas, a traduzir numericamente o que foi sucedendo e a analisar regularidades nos resultados. Se estiverem a trabalhar com as representações físicas da sequência anterior (pequenos quadrados em cartolina), é bastante fácil construírem as respostas do desafio que lhes é sugerido e passarem da manipulação física e concreta à representação simbólica. Pressupõe-se, no entanto, que esta passagem, mais ou menos formal, é um incentivo que o professor deve explorar, mas não de uma forma impositiva. Assim, ter-se-á:

- A soma dos dois primeiros termos:



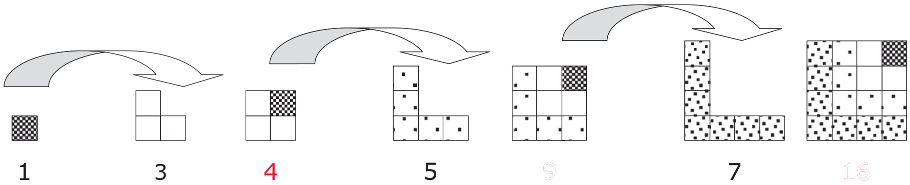
1+3=4

- A soma dos três primeiros termos:



1+3+5=9

- A soma dos quatro primeiros termos:



1+3+5+7=16

A análise das figuras relativas a cada passo, leva à conclusão que se obtém sempre um quadrado. Para ser um pouco mais específico, podem organizar-se os dados e as conclusões, tal como mostra a tabela 7.

Adicionar	Obtemos um quadrado de medida de lado	Medida de área do quadrado
Os **dois** primeiros termos	**2**	2x2=**4**
Os **três** primeiros termos	**3**	3x3=**9**
Os **quatro** primeiros termos	**4**	4x4=**16**
...	...	...

Tabela 7

Mais uma vez, pela análise directa desta tabela, verifica-se que a medida da área do quadrado obtido, em cada momento, está directamente relacionada com o número de elementos da sequência dos números ímpares que se adicionam.

Numa fase posterior, pode abandonar-se a representação física dos quadrados e limitar o trabalho a esquemas, levando a que os próprios alunos, mentalmente, manipulem as figuras para obter o que é pretendido e respondam a questões do tipo: *Obtive um quadrado de medida de área 100. Quantos foram os números ímpares que adicionei? E quais foram eles? Sem adicionar, quanto é 1+3+5+7+9+11+13? Se tivermos um quadrado de lado 13, será que adicionámos 13 números ímpares quaisquer?*

Consoante a maturidade matemática dos alunos, o professor pode continuar o diálogo e chegar à seguinte generalização: *A soma dos n primeiros números ímpares é igual a* n^2. Note-se que o conceito de potência só é referido em anos de escolaridade posteriores, mas pode ultrapassar-se este constrangimento, referindo-o sob a forma de uma multiplicação de dois factores iguais.

2.4.2 Conexões entre Geometria e Medida

Nos primeiros anos de escolaridade, é crucial que os alunos entendam o mundo que os rodeia, quer pela observação directa, quer através da manipulação concreta de objectos. A exploração de tarefas relacionadas com a Geometria, a duas ou três dimensões, facilita essa compreensão e pode também permitir a ligação entre Geometria e Medida, através da tradução numérica de situações geométricas.

Construir uma caixa aberta

Pode construir-se uma caixa aberta ao cortar os cantos de uma folha de cartolina quadrada.

Se a cartolina tiver de medida de lado 12 quadrículas, quais serão as dimensões do pedaço a ser cortado em cada canto, de forma a obter a maior caixa possível?

(Usar apenas números inteiros como medidas.)

A figura 4 ilustra o processo de construção de uma das caixas mencionadas na tarefa:

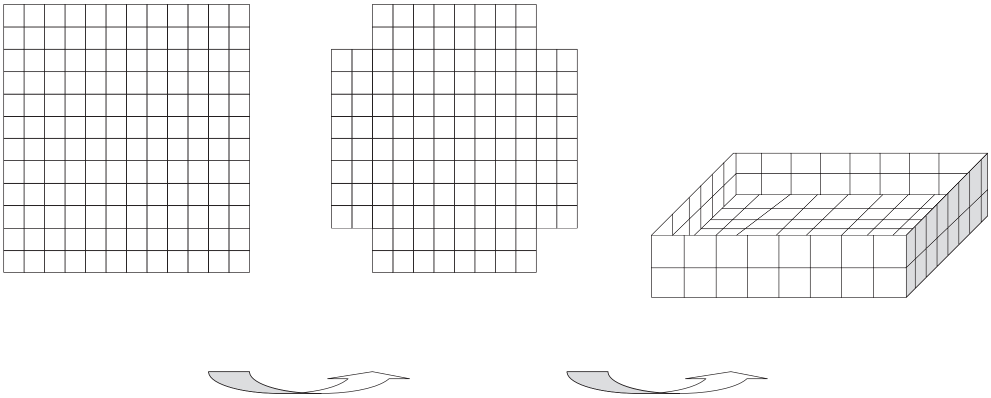


Figura 4

O professor deve, primeiramente, averiguar, em conversa com os alunos, qual a ideia que têm da expressão *a maior caixa possível* e, só depois, permitir que comecem a resolver a tarefa. Professor e alunos devem, então, chegar ao acordo de que *a maior caixa possível* é aquela que permite colocar no seu interior, um objecto com *o maior volume possível*.

A resolução é, neste caso, baseada no processo de *fazer tentativas* e, para alguns alunos, poderá ser útil fazer um modelo físico que os auxilie na visualização da situação. Os alunos devem cortar os cantos e averiguar quais as medidas de comprimento, de largura e de altura da caixa. São estas que permitem determinar a medida de volume do objecto a colocar no seu interior. Para registar os dados e os resultados de cada tentativa, podem organizar uma tabela que lhes permitirá uma melhor análise e conduzirá, no final, à resposta.

Dimensões do canto	**Dimensões da caixa** Cxlxh	**Volume do objecto**
1x1	10x10x1	100
2x2	8x8x2	128
3x3	6x6x3	108
4x4	4x4x4	64
5x5	2x2x5	20

Tabela 8

De facto, o maior volume corresponde às dimensões da caixa 8x8x2, uma vez que, a partir daí, o volume decresce à medida que as dimensões do canto a cortar aumentam. Assim, a resposta à pergunta inicial será: a dimensão do quadrado a cortar é *2x2*.

Como extensão da tarefa anterior, o professor pode lançar o desafio de encontrar a maior caixa aberta possível, a partir de um quadrado de medida de lado 20 quadrículas e de um rectângulo de 22 quadrículas por 15 quadrículas.

2.4.3 Conexões entre operações aritméticas

Depois de interiorizadas as operações, pode e deve também trabalhar-se os respectivos métodos escritos, quer convencionais, quer não convencionais. A exploração de diferentes algoritmos leva, por vezes, a uma relação entre várias operações aritméticas. Como exemplo, propõe-se, na operação multiplicação, a exploração do *Algoritmo Egípcio*.

É interessante mencionar que este algoritmo é um dos mais antigos da operação multiplicação. O Papiro Rhind, escrito por volta de 1650 a. C. (com material ainda mais antigo), tinha por objectivo ensinar os escribas egípcios a operar com os números inteiros e os números fraccionários. Incluía 85 problemas, a maioria dos quais com origem em situações práticas, e contemplava o desenvolvimento de uma aritmética de carácter predominantemente aditivo, o que significa que a principal tendência dos Egípcios era reduzir as multiplicações a adições sucessivas.

Mais recentemente, o Algoritmo Egípcio passou a designar-se por *Algoritmo da Duplicação,* uma vez que, de facto, se tem uma sucessão de duplicações, seguida de uma adição.

O professor pode, portanto, propor aos alunos a aplicação deste algoritmo, através de uma tarefa do tipo:

> ***Algoritmo Egípcio ou da Duplicação***
>
> Através do *Algoritmo Egípcio ou da Duplicação*, calculem:
>
> 37x52
>
> 98x36
>
> 135x82

Por exemplo, para calcular 37x52, começa-se por duplicar, repetidamente, o 52:

1 x 52 =	**52**
2 x 52 =	**104**
4 x 52 =	**208**
8 x 52 =	**416**
16 x 52 =	**832**
32 x 52 =	**1664**
~~**64 x 52 =**~~	~~**...**~~

O processo termina quando, na duplicação seguinte, se obtém um valor superior ao do multiplicador (64>37).

Em seguida, uma vez que 37=32+4+1, o produto 37x52 é igual a (32+4+1)x52, isto é, 1664+208+52, que é igual a 1924. Ou seja, basta adicionar os produtos que correspondem aos multiplicadores cuja soma dá o número 37 e que estão assinalados com uma seta vermelha.

O que é surpreendente é que este método funciona qualquer que seja o multiplicador. Pode perguntar-se, afinal, o que permite assegurar que qualquer número natural se pode obter a partir da duplicação sucessiva da unidade? É difícil saber como é que os egípcios descobriram este facto. Numa justificação mais moderna, pode dizer-se que *todo o número natural se pode escrever através de uma adição em que todas as parcelas são potências de base 2 (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,…)*, isto é, qualquer número natural se pode representar num sistema de numeração posicional de base 2.

Tem-se, portanto, que $37=32+4+1=2^5+2^2+2^0$.

Neste processo, está também implícita a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$
\begin{aligned}
(32+4+1)\times 52 &= 32\times 52+4\times 52+1\times 52\\
&=1664+208+52\\
&=1924
\end{aligned}
$$

Uma variação do algoritmo anterior é o designado *Algoritmo do Camponês Russo,* usado na Europa Medieval. Envolve, também, uma sucessão simultânea de determinação de duplicações e de metades dos dois números a multiplicar.

Suponha-se que se pretende efectuar a seguinte multiplicação: 13x134.

Considere-se, então, uma tabela com duas colunas, a das metades e a dos dobros. Coloque-se, indiferentemente, um factor numa das colunas e o outro factor na outra, calculando-se, respectivamente, a metade e o dobro. Quando se atinge o número 1 na coluna das metades, o processo termina. Como não são permitidos números não inteiros, sempre que na coluna das metades, a divisão não for exacta, considera-se o número inteiro imediatamente inferior ao obtido. Para terminar, eliminam-se as linhas que, na coluna das metades, tenham valores pares e adicionam-se, na coluna dos dobros, os restantes valores. O resultado obtido é o produto dos dois números iniciais.

Coluna das metades	***Coluna dos dobros***
13	134
~~6~~	~~268~~
3	536
1	1072
Resultado	**1742**

Tal como no *Algoritmo Egípcio*, a ideia chave é a decomposição de um qualquer número numa adição de potências de base 2 (num sistema de numeração posicional de base 2) e a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Logo, se $13=2^3+2^2+2^0=8+4+1$ então

$$
\begin{aligned}
13\times 134 &= (8+4+1)\times 134\\
&=8\times 34+4\times 134+1\times 134\\
&=1072+536+134\\
&=1742
\end{aligned}
$$

O professor tem, agora, oportunidade de propor aos alunos a tarefa:

Algoritmo do Camponês Russo

Através do *Algoritmo do Camponês Russo*, calculem:

13x134

45x98

54x17

Explorando vários exemplos destes algoritmos, o professor permite que mesmo os alunos que ainda não dominam a tabuada tenham sucesso nos cálculos. Basta que, para tal, saibam multiplicar e dividir por 2.

A concluir

Ao longo deste capítulo, pretendeu-se salientar a importância de o professor ajudar os alunos a estabelecerem conexões matemáticas, de modo a que considerem a Matemática como uma teia de relações, fortemente ligada a outras áreas curriculares e ao mundo que os rodeia, e não como uma Ciência isolada, inacessível e fechada sobre si mesma.

Simultaneamente, procurou-se ilustrar, através de exemplos adequados ao 1.º ciclo do ensino básico, vários tipos de conexões, com a consciência de que muitos outros se poderiam realçar. As tarefas apresentadas não se destinam a um ano de escolaridade específico, uma vez que tudo depende do desenvolvimento matemático dos alunos. Cabe ao professor, perante a realidade do seu trabalho, imaginar outras formas de tirar partido das experiências e vivências dos alunos e dos acontecimentos que preenchem o dia a dia da sala de aula, por forma a favorecer, através do estabelecimento de conexões, uma compreensão mais profunda, consolidada, diversificada, interligada, persistente e formal dos vários tópicos matemáticos.

Ao planificar o trabalho em Matemática, o professor deve ter consciência da necessidade de interrelacionar os conceitos e os processos a explorar no momento, não só com os anteriormente aprendidos, mas também com aqueles que surgirão num futuro, mais ou menos próximo. As conexões matemáticas têm, portanto, também que ser equacionadas na dimensão temporal do processo de ensino e aprendizagem.

3

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Chegou-se a fazer crescer os rapazes numa planície matemática esterilizada e esterilizadora, capaz de sufocar qualquer objecção, qualquer diálogo. Porque se quisermos que o ensino da Matemática seja autenticamente vivo e fecundo, deveremos apresentar uma ciência que se faz e não uma ciência já feita.

(Sebastião e Silva, cit. Castelnuovo, 1982)

3.1 Introdução

A memória que muitos de nós, senão todos, temos dos bancos da escola remete para uma concepção de comunicação unidireccional: do professor e/ou dos livros de texto para os alunos. As intervenções dos alunos estão frequentemente limitadas às respostas dadas às perguntas dos professores.

A matemática escolar é ainda muito concebida como números, factos, regras e reprodução de procedimentos memorizados. Sabe-se que a natureza e a essência da actividade desta área do saber é muito mais do que isto. Valorizando a comunicação matemática, através da criação de momentos ricos de interacção em torno de ideias significativas, surgem oportunidades favoráveis à apropriação de outras dimensões da matemática que vão muito para além daquela visão.

Uma comunicação na sala de aula baseada na partilha de ideias matemáticas, permite a interacção de cada aluno com as ideias expostas para se poder apropriar delas e aprofundar as suas. Nesta perspectiva, a comunicação permite aprender, mas também contribui para uma melhor compreensão do próprio pensamento.

Um aluno que tem um modo próprio de abordar e resolver um problema pode beneficiar da análise da forma como um seu colega resolve o mesmo problema. Uma resolução diferente revela, muitas vezes, aspectos diferentes. O exercício de compreensão das estratégias e métodos usados por outros e o esforço desenvolvido para avaliar a sua correcção, validade e utilidade, contribuem para o alargamento do conhecimento matemático. Além disso, à medida que os alunos vão explicitando as suas ideias, o professor tem oportunidade de perceber como eles estão a pensar, o que lhe permite identificar concepções erradas, "arbitrar" o uso da linguagem matemática e planear novos desafios a colocar.

Vista por este prisma, a comunicação faz parte de uma aprendizagem significativa da Matemática, na medida em que proporciona aos alunos o contacto com o essencial da actividade matemática e, ao professor, bons indicadores sobre o processo de ensino e aprendizagem. A importância da comunicação matemática é, aliás, hoje reconhecida por vários documentos curriculares (ME, 2001; NCTM, 2000; Ponte et al., 2007).

Ao longo deste capítulo, procurar-se-á caracterizar diferentes dimensões da comunicação matemática na sala de aula, considerando-a num sentido abrangente e assumindo-a como parte integrante da essência do processo de uma aprendizagem significativa. Para isso, recorrer-se-á, sempre que oportuno e a título de ilustração, a pequenos diálogos e a produções de alunos.

3.2 Comunicar para aprender

A comunicação está sempre presente na sala de aula, tenha esta características inovadoras ou se reja por um padrão tradicional. Em qualquer dos casos, cabe ao professor gerir a comunicação e garantir que ela ocorre em múltiplas direcções: do professor para o(s) aluno(s), do aluno para o professor e de aluno para aluno(s). Em muitas aulas de Matemática, a primazia é dada às duas primeiras direcções e do aluno espera-se que intervenha apenas para responder ao professor, para justificar um cálculo… e pouco mais. Por esta via, perde-se muitas oportunidades de aprendizagem que podem advir de outro tipo de interacções comunicativas. Na verdade, para que a comunicação matemática na sala de aula seja profícua, há que criar condições e hábitos que permitam, a todos, não apenas falar, mas também escutar.

Comunicar uma ideia ou um raciocínio a outro, de forma clara, exige a organização e clarificação do nosso próprio pensamento. Na verdade, as nossas ideias tornam-se mais claras para nós próprios quando as articulamos oralmente ou por escrito. Simultaneamente, a partilha de ideias matemáticas permite a interacção de estratégias e pensamentos de cada um com os de outros. Por outras palavras, permite que as ideias se tornem objectos de reflexão, discussão e eventual reformulação. As tentativas de comunicar um raciocínio pessoal proporcionam oportunidades para uma compreensão mais profunda da Matemática (Lampert, 2001).

Uma escolha cuidadosa das tarefas a propor aos alunos tem um papel importante na criação de oportunidades ricas de comunicação, o que não quer dizer que só as tarefas abertas sirvam este propósito. Considere-se, a título de exemplo, a questão "9+11= ?". Numa situação deste tipo, o professor pode tomar uma de duas atitudes: aceitar a primeira resposta correcta ou, em alternativa, pedir explicações e incentivar a que mais do que um aluno explicite a sua forma de chegar a ela. Observe-se o exemplo apresentado por Yackel et al. (1991).

9+11=?

Bárbara: 9 e 9 são 18, mais 2 são vinte.

Adão: 7 e 7 são 14, portanto, 8 e 8 são 16, 9 e 9 seriam 18, assim, 9+11 deve ser igual a 20.

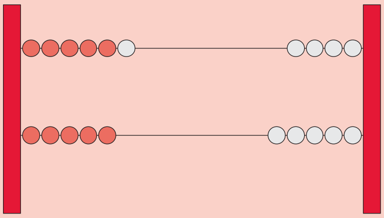
Cristina: 11 e 11 igual a 22. 10 e 11 igual a 21. 9 e 11 igual a 20.

Joana: 11 e 9 mais –12, 13,…,18, 19,20.

Neste exemplo, não há diálogo entre os alunos. No entanto, ao verbalizarem a forma como pensaram para efectuar o cálculo, dão importantes pistas ao professor sobre o que sabem sobre os números, as operações e suas relações e, ainda, sobre a forma como são capazes de usar este conhecimento. Esta verbalização cria ainda uma oportunidade para, ao perceberem como outros pensaram, descobrirem novas relações entre os números e as operações e, eventualmente, adoptarem, no futuro, estratégias mais eficazes. Na apropriação de procedimentos de outros que foram reconhecidos como mais eficazes, a comunicação desempenha um papel importante que é o de permitir que um *modelo de pensamento* de um aluno se transforme num *modelo para pensar* dos restantes (Fosnot e Dolk, 2001).

No episódio *Total de Contas*, apresentado em seguida, a professora, Linda, enfatiza deliberadamente a eficácia da estratégia usada por um aluno e canaliza a atenção dos restantes para ela. A intenção é fornecer um modelo para pensar. Nesta situação (adaptada de Fosnot e Dolk, 2001) a professora trabalha com um *ábaco horizontal*[1] do tipo do que se vê na figura. Com o ábaco tapado, coloca um conjunto de contas do lado esquerdo. Depois destapa-o por uns instantes dando aos alunos a possibilidade de o observar e volta a tapá-lo. De seguida, convida-os a dizer o que viram e a relatar como chegaram ao número total de contas.

Total de contas



Linda: O que viste? Vira-te para o teu colega do lado e diz-lhe o que fizeste. Depois de alguns momentos de discussão em pares, Linda inicia uma discussão com todo o grupo.

Linda: Margarida, o que viste?

Margarida: Eu vi 5 vermelhas e uma cinzenta em cima, e cinco vermelhas em baixo.

Margarida responde rapidamente mas fica confusa ao tentar explicar quantas são ao todo. Vai ao ábaco e destapa-o para contar de 1 a 11. O seu colega Guilherme concorda que são 11 e explica como lá chegou.

Guilherme: Sete, oito, nove, dez, onze.

Linda: E tu, Sofia, puseste a tua mão no ar tão rapidamente, como contaste tu?

Sofia: Eu não tive de contar – diz orgulhosamente – porque sabia que havia 5 vermelhas em cima e 5 vermelhas em baixo; isso faz 10, depois mais uma 11.

Linda: Uau! Isso é uma boa estratégia, não é? Talvez alguns de vocês a queiram usar.

Linda promove a explicitação das estratégias de contagem usadas pelos seus alunos, enfatiza a eficácia da usada por Sofia e canaliza a atenção dos restantes para ela, desafiando-os a usarem este procedimento numa próxima oportunidade.

O episódio *Total de contas* ilustra uma perspectiva de ensino e de aprendizagem em que o aluno tem oportunidade de se envolver na construção do seu próprio conhecimento. Este envolvimento depende, em muito, da comunicação oral que caracteriza o ambiente de aprendizagem, ou seja, da qualidade do discurso presente na sala de aula. O professor desempenha aqui um papel fundamental como motor do desenvolvimento de um discurso matematicamente produtivo e de um ambiente de sala de aula em que falar faz parte do "fazer Matemática".

[1] Este material manipulável é formado por duas hastes laterais as quais seguram dois arames que contêm dez contas cada um (num total de vinte). Em cada uma das filas estão dispostas cinco contas de uma cor e cinco de outra, no caso da figura, vermelho e cinzento. Esta disposição evidencia a decomposição do 20 privilegiando a estrutura do 5 ou do 10, permitindo por isso contagens que realcem o 5 ou o 10, ou seja, permite aos alunos contarem de 5 em 5 ou de 10 em 10, em vez de contarem sempre de 1 em 1. Importa sublinhar que existe uma versão com 100 contas dispostas em 10 filas de 10 com a mesma organização descrita acima para cada fila: 5 contas de uma cor e 5 contas de outra cor. Neste caso, o ábaco horizontal é um bom apoio para a estruturação das contagens até 100.

3.3 A Pergunta como Catalisador da Comunicação

Tradicionalmente, o professor tem a primazia na comunicação oral e a sua intervenção divide-se, fundamentalmente, em exposição e questionamento. Da exposição, espera-se que seja clara e que possibilite a passagem de conhecimentos do professor para os alunos. As perguntas são dirigidas a um aluno ou a um grupo de alunos e espera-se uma resposta que é validada pelo professor.

A perspectiva de comunicação que se adopta não exclui nenhuma das formas de comunicar referidas, mas preconiza um maior equilíbrio nos "tempos de antena" de professor e alunos e um maior protagonismo destes. Dos alunos, espera-se que falem mais; do professor espera-se que oiça mais.

Para que seja possível envolver os alunos numa actividade matemática significativa, o professor deverá ser, simultaneamente, líder e participante. Nesta desejável liderança participativa, a pergunta constitui um instrumento que permite manter o grupo coeso e comprometido com as ideias matemáticas em discussão. Desempenha, ainda, um papel provocador e desafiador do pensamento matemático dos alunos. A pergunta deixa de ter por objectivo único o teste aos conhecimentos dos alunos para ser o elemento catalizador de uma comunidade de aprendizagem.

O uso, na sala de aula, de um questionamento com estas características permite manter um diálogo em que todos os participantes se envolvem com as ideias matemáticas em discussão. Nestas condições, a quantidade de informação partilhada é muito grande e o professor deve ter uma atitude atenta e compreensiva da actividade dos alunos. O maior acesso à forma como pensam dá-lhe pistas valiosas sobre o seu desenvolvimento matemático e permite-lhe conduzir a conversação.

Atentemos no episódio *Fomos comprar Fiambre.* Após a realização de uma visita de estudo que incluiu um piquenique preparado colectivamente pela turma, a professora recordou aos alunos as compras feitas para o preparar. Analisaram os talões das compras e, após um curto período de discussão, centraram-se na compra do fiambre. Uma das alunas observa que os 400 gramas de fiambre custaram 3,72 euros e diz que gostaria de saber quanto custa um quilo de fiambre. A situação de partida é, assim, transformada num problema. A professora propõe que o resolvam em grupo e vai circulando pela sala, de modo a acompanhar o trabalho dos vários grupos. A resolução de um dos grupos interessa-lhe especialmente, pelo que decide focar nele a atenção de toda a turma, o que dá origem ao diálogo que se apresenta.

Fomos comprar Fiambre

Professora: Gostava que prestassem aqui atenção à forma como o Daniel pensou. É que ele seguiu um caminho diferente...

Daniel: Eu fiz 0,93 vezes 4.

Patrícia (olhando para a professora): 0,93? Onde está 0,93?

Professora: Pergunta-lhe.

Patrícia: Onde foste buscar esse 0,93?

Daniel: 0,93 é isto (escreve no quadro 0,93 é 100g).

Professora: Se calhar é melhor explicar aqui uma coisa. De que é que estavas à procura?

Daniel: De quanto custa 100g e cheguei a 3,72.

Professora: Alto aí. Vamos lá explicar isto melhor para todos perceberem. Tu andavas à procura do preço de 100g e …

(silêncio)

Professora: Descobriste 0,93 …

Daniel: Sim, somei quatro vezes 0,93 e deu 3,72 €.

Professora: Vamos lá ver. Como fizeste até aqui, como é que descobriste 0,93?

Daniel: Primeiro pensei 0,9. Ia dar 3,6. Isso eu sei porque 4x9=36. Depois fiz 0,91 e não deu.

Professora: 0,91 e depois 0,93! Mas 0,93 é o quê? O que procuravas?

Daniel: 3,72.

Professora: Isso.

Daniel: Descobri o 3,64 (escreve 4x0,91=3,64) mas ainda era pouco por isso fui tentar 0,92. Deu 3,68 (escreve 4x0,92=3,68) ainda não chegava. Depois experimentei 0,93 e já deu o que eu queria: 3,72 (escreve 4x0,93=3,72).

Professora: Perguntas ao Daniel. Quem faz?

(silêncio)

Professora: Ele experimentou 0,91 depois 0,92 finalmente 0,93 e obteve o que queria 3,72. Quem tem uma pergunta para o Daniel?

(silêncio)

Professora: Então não estão a perceber porque é que ele queria chegar a 3,72?

Vera: Mas ainda não acabou, é preciso mais contas.

Daniel: Agora já sei que 1kg são 9,3 € (escreve). Fiz vezes 10.

Vasco: 10 vezes o 0,93.

Professora: Porquê essa multiplicação por dez? Explica lá.

Daniel: Então 1kg é 1000g por isso … como 1000 é 10 vezes 100 eu tinha que fazer vezes 10.

Professora: Então, resumindo, quanto custam 100g? E quanto custa 1kg?

Daniel: Custam 0,93 € e 1kg é 9,3 €.

Este episódio constitui um exemplo de um momento rico de partilha de ideias na sala de aula, potenciador das aprendizagens dos alunos. Nele, a professora intervém, praticamente, só na forma interrogativa. Começa por pedir a atenção dos alunos e, depois, ao longo do diálogo, a sua participação é no sentido de focar a atenção dos alunos no objecto essencial de análise: *De que é que estavas à procura? Mas 0,93 é o quê? O que procuravas?* Outras das suas intervenções caracterizam-se por pedir explicações ou justificações: *Porquê essa multiplicação por dez? Explica lá*. Também encontramos intervenções que revelam a preocupação em manter o grupo envolvido na discussão em causa: *Pergunta-lhe. Perguntas ao Daniel. Quem faz? Quem tem uma pergunta para o Daniel?* Surge, ainda, uma pergunta que, ao confrontar os alunos com o que parece ser uma dificuldade, procura mobilizá-los para a participação na discussão: *Então não estão a perceber porque que é que ele queria chegar a 3,72?* É claro que, ao longo de todo o diálogo, a professora se preocupa em provocar o pensamento dos alunos, comprometê-los com as ideias em análise e promover um debate para o qual procura chamar a participação de todos.

A "arte de questionar" na sala de aula, de modo a facilitar a aprendizagem, não é tarefa fácil. Johnson (1982) e Reinhart (2000) consideram que para a promoção de uma aprendizagem significativa é mais proveitoso fazer perguntas, ou devolver boas perguntas a um aluno, que dar-lhe prontamente respostas. Para concretizar esta perspectiva, os autores apresentam um conjunto de recomendações que permitem um questionamento que conduza a momentos ricos em aprendizagens. Por exemplo, é fundamental que o professor:

- não faça perguntas que tenham por resposta apenas "sim" ou "não";
- dê tempo aos alunos para reflectirem e responderem;
- evite formular perguntas que, de alguma forma, incluam a resposta;
- evite responder às suas próprias perguntas.

Indo um pouco mais longe, pode mesmo identificar-se características de boas perguntas. São aquelas:

- que conduzem o aluno a alguma aprendizagem pelo facto de lhes responder;
- que obrigam à análise, à reflexão, à explicação de raciocínios;
- que obrigam a pensar em níveis mais elaborados;
- cuja resposta constitui uma boa pista, para o professor, sobre aquilo que o aluno efectivamente sabe e aquilo que não sabe.

Esta caracterização parece conduzir, de imediato, à ideia de perguntas de carácter aberto. Naturalmente, estas são as melhores para desencadear uma discussão ou para incentivar níveis mais sofisticados de pensamento. No entanto, as perguntas fechadas são úteis para focar a turma no essencial, como se procurou ilustrar através da análise do episódio *Fomos comprar fiambre*.

Na verdade, um dos aspectos a ter em conta é, justamente, o dos diferentes papéis das questões. Procura-se, aqui, caracterizá-los, recorrendo a uma categorização de Way (2001) que, embora elaborada no contexto de tarefas abertas, é adequada a outras situações.

Questões de partida são questões abertas que pretendem focar o pensamento da criança numa determinada direcção. Fazem, muitas vezes, parte do enunciado da tarefa e visam desencadear a actividade do aluno. Questões deste tipo podem, na fase de lançamento da tarefa, merecer uma atenção especial e justificar algum diálogo no sentido de garantir a compreensão da pergunta. Alguns exemplos: *Quantas maneiras consegues encontrar para …? O que acontece quando ...? Quantos …. diferentes podem ser encontrados? O que podemos fazer a partir de …?*

Questões para incentivar o pensamento matemático são questões que ajudam o aluno a focar-se numa determinada estratégia, desafiando-o a procurar regularidades e relações. Promovem a formação de redes conceptuais fortes. Questões como: *O que é igual? O que é diferente? Consegues relacionar estas … de alguma maneira?* podem ser usadas com este propósito e incentivam o aluno a interpretar os dados de que já dispõe e/ou as estratégias que já explorou. Estas questões são oportunas nos momentos em que o aluno está num impasse: não sabe o que há-de fazer a seguir. Outras questões úteis para ajudar o aluno em situações de impasse são as que fazem apelo à memória e, por isso, lhe proporcionam o acesso a informação adicional cuja ausência o impede de avançar. São disso exemplo questões como: *Afinal o que é um quadrado? Quanto é 7x8?* Uma outra estratégia questionadora que pode, também, ser útil consiste em incentivar o recurso a formas de registo alternativas: *Haverá uma maneira de registar o que encontraste que te ajude a ver uma regularidade?*

Questões para avaliação caracterizam-se por um forte cariz analítico que visa, por um lado, promover no aluno a tomada de consciência do próprio pensamento e, por outro, dar ao professor pistas sobre a forma como ele pensa, o que compreende e como compreende. Estas questões só fazem sentido quando o aluno já teve oportunidade de chegar a uma solução ou de ter feito algumas descobertas. Focam-se, fundamentalmente, no pedido de justificações ou explicações. Por exemplo: *O que descobriste? Como descobriste isso? Porque pensas isso? O que te fez decidir fazer dessa maneira?*

Questões para a discussão final são fundamentais para sistematizar e consolidar uma série de aspectos que se prendem tanto com resultados, como com processos na síntese ou discussão final de uma actividade. É esta reflexão final que congrega esforços de toda a turma, proporciona a comparação de soluções e estratégias e constitui uma oportunidade para os alunos tomarem consciência de ideias matemáticas, e poderem ir mais além, nomeadamente no estabelecimento de conexões. Exemplos de boas questões, orientadoras de um momento colectivo com estas características, podem ser: *Quem tem a mesma resposta? Quem chegou a uma solução diferente? Todos têm a mesma resolução? Em que difere? Encontrámos todas as possibilidades? Como podemos saber? Pensaram noutra maneira de fazer? Acham que encontrámos a melhor solução?*

Tem-se vindo a referir a importância da comunicação e o papel da pergunta como motor dessa mesma comunicação. Seria agora oportuno questionar: e as respostas? Na verdade, quando se faz perguntas é expectável e desejável que haja respostas. No entanto, não menos importante do que fazer as perguntas certas na altura certa, é saber o que fazer com as respostas. Neste domínio, parece ser mais difícil encontrar sugestões gerais. No essencial, tudo passa por escutar e decidir. Por exemplo, o que fazer com uma resposta pode ser o colocar uma nova pergunta. É fundamental que o professor ouça atentamente as ideias dos alunos; e decida quais "agarrar" e quais "deixar cair". Identificar as ideias essenciais que podem conduzir os alunos a uma compreensão mais profunda da Matemática, tendo por horizonte a planificação do professor, é a pedra de toque de todo este processo.

3.4 Escrever em Matemática

Até este ponto o foco tem sido os aspectos orais da comunicação. Mas também a escrita desempenha um papel importante. De facto, se comunicar oralmente o nosso pensamento a terceiros exige um esforço de organização de ideias, passá-lo ao formato escrito é ainda mais exigente. Só que os registos escritos acrescentam uma maior profundidade à reflexão, pois o acto de escrever obriga a reflectir sobre o próprio trabalho e a clarificar pensamentos sobre as ideias desenvolvidas.

O que anteriormente foi dito sobre a comunicação é válido para o seu formato escrito. Na verdade, falar, desenhar ou escrever sobre raciocínios matemáticos oferece oportunidades para justificar pensamentos, sintetizar ideias e tomar consciência de intuições. Os registos escritos, sejam eles textos, esquemas ou mesmo desenhos, não se perdem. É sempre possível voltar a eles e retomar as ideias que traduzem, no momento em que adquiram um novo sentido, em que contribuam para a compreensão de outra situação ou conceito ou em que o aluno esteja em condições de estabelecer conexões que possibilitem um entendimento mais profundo.

Assim, escrever em Matemática e a propósito da Matemática é algo que deve ser incentivado desde muito cedo. Sabe-se que, nos primeiros anos, a desenvoltura na escrita é ainda escassa. No entanto, outros registos escritos, como desenhos ou esquemas, servem também para comunicar. A escrita propriamente dita irá surgindo progressivamente, à medida que as competências nesse domínio se vão desenvolvendo. No 3.º ano, se não antes, os alunos já são capazes de sequenciar ideias e acrescentar-lhes detalhes, pelo que a sua escrita começa a ser mais elaborada. Poderá sê-lo, também, quando se trata de escrever sobre Matemática. Para alguns propósitos e em determinadas fases, é adequado que os alunos descrevam informalmente o seu pensamento, usando linguagem corrente e esboços, mas devem aprender, progressivamente, a comunicar de modo mais formal (NCTM, 2000). Em suma, trata-se de começar cedo a construir o caminho para que os alunos venham a ser capazes de escrever argumentos matematicamente válidos, bem construídos e com recurso a vocabulário formal.

Criar o hábito da escrita, a partir da Matemática e sobre a Matemática, é importante, mas não é fácil. Quem já experimentou teve, com certeza, a experiência frustrante de, nas primeiras vezes que se atreveu a perguntar aos alunos como pensaram ou como chegaram a determinado resultado, obter uma resposta do tipo: "Olha, pensei e fiz". Também perante a solicitação de escrita, os alunos começam por não saber muito bem o que se pretende e respondem de forma vaga e pouco esclarecedora (ver figura 1).

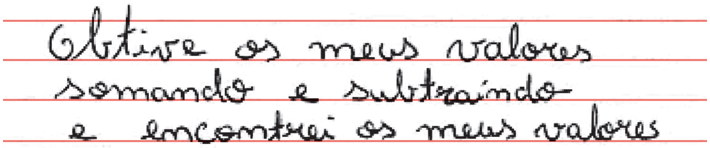


Figura 1

Promover a comunicação escrita começa por tornar a prática da escrita uma parte integrante das tarefas desenvolvidas na sala de aula. Trata-se de pedir aos alunos para não escreverem apenas cálculos e resultados e incentivá-los a que escrevam sobre problemas resolvidos, estratégias usadas e raciocínios desenvolvidos.

Neste contexto, é importante dar alguma orientação aos alunos. Uma possibilidade é o recurso a uma lista de palavras que apele à reconstituição das diferentes fases do processo de exploração de uma tarefa e oriente a explicitação escrita da linha de pensamento seguida. Uma lista com estas características pode ser:

- Primeiro, …
- Depois, …
- A seguir, …
- Por fim, ...

Outra possibilidade é elaborar uma espécie de guião orientador da escrita a partir da exploração de uma tarefa aberta. Neste guião, as perguntas voltam a ter um papel de relevo:

- No que reparaste?
- O que achaste interessante?
- Que previsões fizeste? Porquê?
- Que padrões viste? Porque surge esse padrão?
- Que relação te faz lembrar?
- O que é que as tuas descobertas te fazem pensar?

Estas ou outras questões, depois de negociadas e interpretadas na turma, podem ser colocadas em local acessível (no próprio caderno de Matemática ou num cartaz na parede) e servir de orientação para os alunos identificarem o que pode ser relevante.

Também útil no trabalho de preparação dos alunos para a escrita, pode ser o confronto com dois tipos de registo escrito: um revelador do pensamento e outro nada revelador. Uma análise colectiva e participada destes registos, pode ajudar os alunos a perceber o que se pretende: que outros tenham acesso à forma como pensámos. Concretize-se esta ideia pelo confronto entre a figura 1, anteriormente apresentada, e os registos de Tony (figuras 2 e 3, adaptadas de Whitin & Whitin, 2002) associados à exploração da investigação *O piquenique das formigas.*

O piquenique das formigas

Num belo dia de Sol, as 100 formigas do formigueiro decidiram fazer uma pausa na sua vida sempre atarefada e ir fazer um piquenique. Mas não conseguiam decidir a forma de se organizarem em filas. As formigas discutiram tão longamente se a disposição deveria ser em filas de 50, 25, 20 ou 10 formigas que ficaram sem a comida porque outros animais a foram comendo.

A professora propôs aos seus alunos que encontrassem todas as disposições rectangulares possíveis para números entre o 3 e o 30. Para isso disponibilizou conjuntos de quadrados com 1 cm de lado e sugeriu que os dispusessem em filas e colunas tal como as formigas.

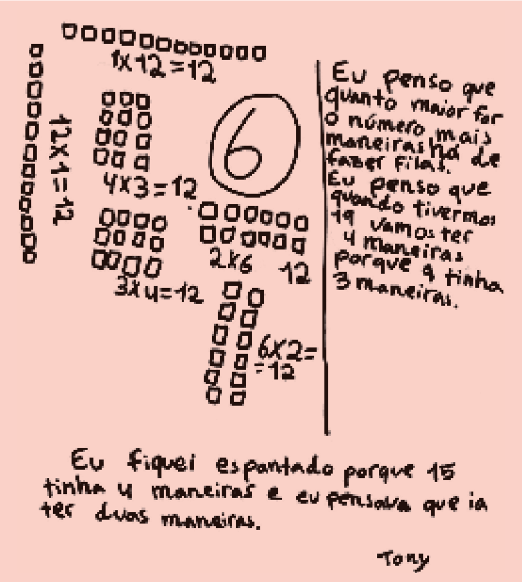


Figura 2

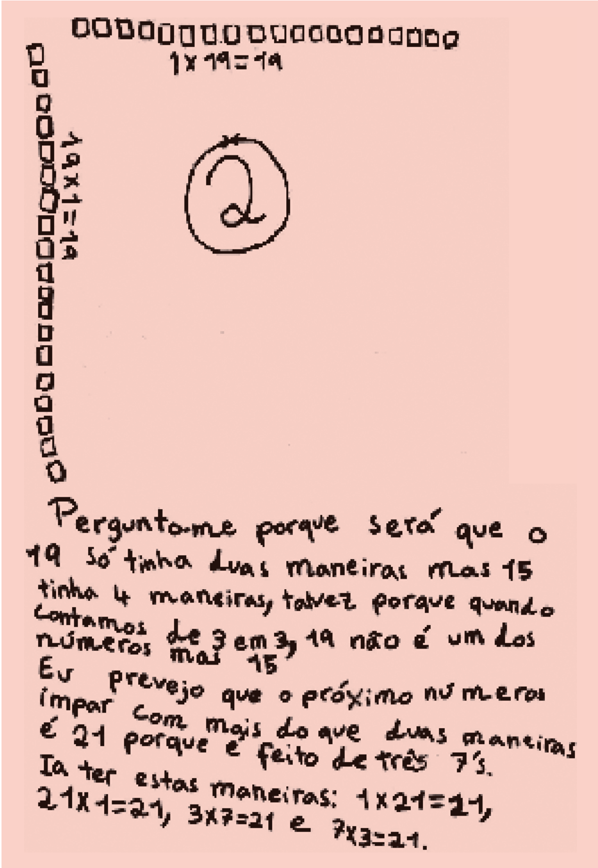


Figura 3

Na verdade, um registo do tipo do ilustrado na figura 1 não nos revela nada sobre como pensou quem o fez. Em contrapartida, a partir de registos de Tony, temos acesso ao seu pensamento. Os alunos podem mesmo ser desafiados a reconstituir os raciocínios dos colegas a partir dos seus registos. Facilmente perceberão quais as situações em que a compreensão dos procedimentos de outro lhes estão vedadas, pela ausência de evidências delas no registo, por oposição àquelas em que é possível reconstituir uma ideia, um raciocínio, até um caminho.

Com efeito, o primeiro registo de Tony (figura 2) dá-nos conta da exploração feita por este aluno a partir da tarefa proposta. O desenho traduz algumas das disposições que experimentou. Lendo o que escreveu, fica-se a saber que experimentou outras disposições e encontra-se o registo das suas previsões e também das surpresas a que foi conduzido. A partir do segundo registo (figura 3), pode-se perceber que Tony testou a conjectura que estabeleceu a respeito do número dezanove e reformulou a sua conjectura inicial.

Os aspectos da comunicação que se têm vindo a evidenciar, quer na dimensão escrita, quer na dimensão oral, remetem para a representação das ideias matemáticas. Na verdade, existe uma estreita interdependência entre as representações em Matemática e a comunicação que justifica que se lhes dispense aqui alguma atenção sem uma preocupação de exaustividade.

3.5 Representações e Linguagens

O termo representação, como muitos outros, tem múltiplos significados que se completam. Refere-se quer ao acto de capturar um conceito ou relação – processo –, quer à sua forma propriamente dita – produto. Nesta publicação usa-se o termo representação em ambos os sentidos.

Quer enquanto processo, quer enquanto produto, as representações de ideias matemáticas correspondem tanto a processos observados externamente, como a processos que ocorrem internamente na mente das pessoas que estão a trabalhar em Matemática. Todas estas dimensões devem ser tidas em consideração no ensino e aprendizagem da Matemática.

Na verdade, a compreensão das representações aliada à capacidade de representar ideias, constituem ferramentas fundamentais para pensar matematicamente. Por esta razão, as representações devem ser tratadas como elementos essenciais da compreensão matemática dos alunos no que respeita a conceitos, a procedimentos e às relações entre eles (NCTM, 2000). Podem ter-se representações convencionais e não convencionais, mas a existência de representações partilhadas é essencial para que possa haver comunicação e compreensão. Por sua vez, é através da comunicação que se negoceiam representações.

Existem várias formas de representar ideias matemáticas: as *representações activas,* as *representações icónicas* e as *representações simbólicas* (Bruner, 1962).

As *representações activas* estão associadas à acção. A importância deste modo de representação decorre do pressuposto de que o conhecimento surge através da acção. Assim, a manipulação directa e adequada de objectos, sejam eles de uso corrente ou especialmente concebidos como material didáctico, e a simulação de situações, propiciam oportunidades para criar modelos ilustrativos, contribuindo para a construção de conceitos.

As *representações icónicas* baseiam-se na organização visual, no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles. Este modo de representação distancia-se, assim, do concreto e do físico. As representações podem ser feitas pelo professor, ser encontradas nos manuais, produzidas por sugestão do professor ou elaboradas espontaneamente pelos alunos.

As *representações simbólicas* consistem na tradução da experiência em termos da linguagem simbólica. Correspondem, não apenas aos símbolos que representam ideias matemáticas, mas a todas as linguagens que envolvem um conjunto de regras fundamentais quer para o trabalho com a Matemática, quer para a sua compreensão.

Estas diferentes possibilidades de representação não devem ser entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras. Na verdade, podem ser usadas simultaneamente ou segundo várias combinações que estão presentes ao longo de toda a vida. O modelo apresentado na figura 4 pode ser útil para orientar o trabalho do professor, na medida em que este deve decidir se, e quando, usa – ou incentiva a usar – cada um dos diferentes modos de representação.

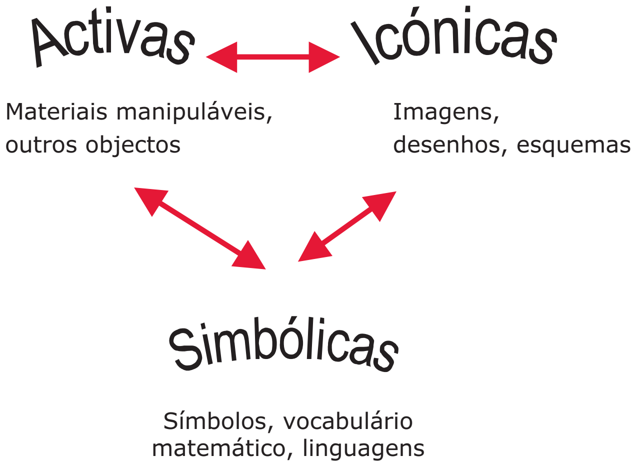


Figura 4 – Modos de representação

Sublinha-se a importância de enfatizar as conexões entre as diferentes representações, traduzidas pelas setas do esquema. É justamente a comunicação que permite o surgimento destas ligações. Veja-se o exemplo *Caixas de bombons* (adaptado de Dolk, Fosnot, Hersch & Cameron, 2005) e atente-se nas representações a que os alunos recorreram para explorar esta situação.

> ***Caixas de bombons***
>
> A professora Paula inicia uma conversa com a turma pedindo aos alunos que recordem objectos onde seja possível identificar uma disposição rectangular. Os alunos referiram teclados.
>
> De seguida, a professora conta aos alunos que reparou na disposição rectangular de uma caixa de bombons que lhe ofereceram. Mostra aos alunos a caixa e, com eles, analisa a disposição dos bombons. Tratava-se de duas camadas de 12 bombons dispostos em 2 filas de 6 bombons cada, em cada camada.
>
> Posto isto, Paula desafia os alunos a descobrirem outras disposições que permitam arrumar 24 bombons.

Depois de algum tempo de exploração da tarefa, Paula solicita aos alunos que apresentem e expliquem as suas resoluções à turma. Para tal, transcreveram-nas para folhas A3 e fixaram-nas no quadro.

É notória a importância que as representações desempenham, quer na organização, quer no registo, quer ainda na comunicação das ideias matemáticas associadas aos processos de resolução. Veja-se, por exemplo, a resolução de Margarida e Ana (figura 5). Estas alunas recorrem a uma tabela para organizar as suas diferentes tentativas e, assim, poderem mais facilmente comunicá-las ao grupo, ao mesmo tempo que recorrem a representações icónicas e simbólicas.

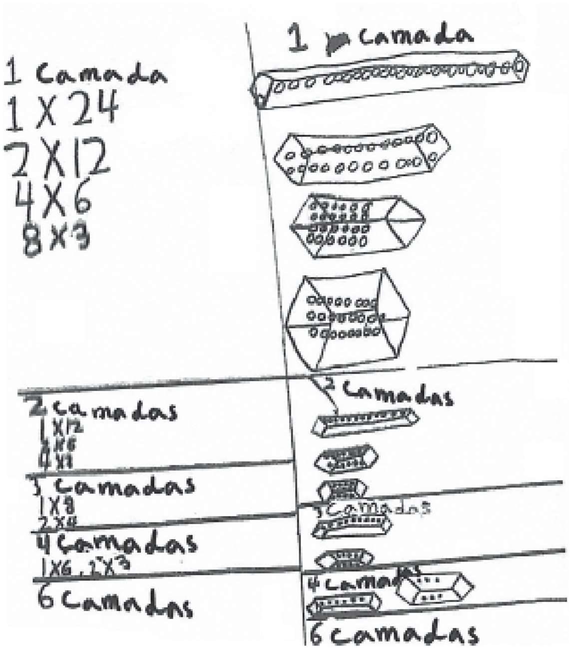


Figura 5 – Resolução de Margarida e Ana (adaptada de Dolk et al., 2005)

Já Madalena e Afonso (ver figura 6) recorrem a representações simbólicas para traduzir a sua abordagem do problema. Utilizam símbolos (números e operadores) e linguagem escrita. No entanto, quando foram interrogados pela professora sobre como poderiam garantir que não têm caixas repetidas, recorrem a representações activas usando cubos de encaixar. Explicam, por exemplo, que (2x2)x6 corresponde a uma rotação da disposição original apresentada pela professora — (2x6)x2 —, e não a uma repetição, e ilustram a explicação com uma construção com cubos que rodam. Os colegas, por seu turno, querem saber como eles pensaram e, também aqui, os alunos recorrem aos cubos e, portanto, à representação activa (ver figuras 7, 8, 9 e 10): "dividimos ao meio o 6 e duplicamos o 2 ficou (2x3)x4".

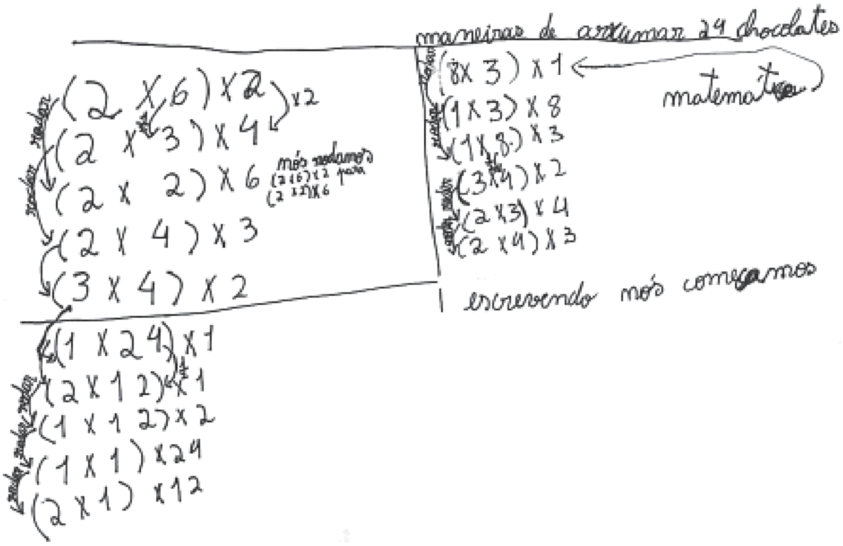


Figura 6 – Resolução de Afonso e Madalena (adaptada de Dolk et al., 2005)

Figura 7 – (2x6)x2

Figura 8 – Dividindo ao meio

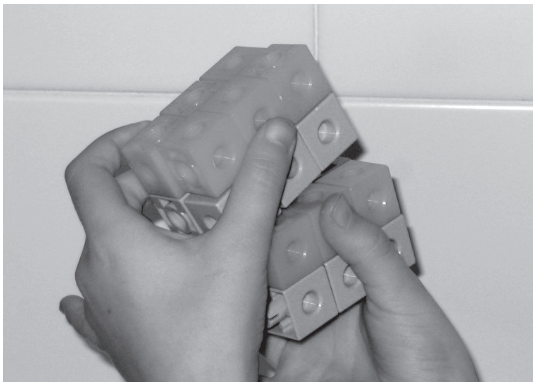


Figura 9 – Duplicando

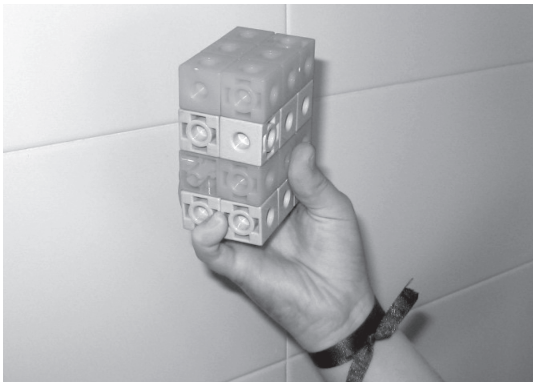
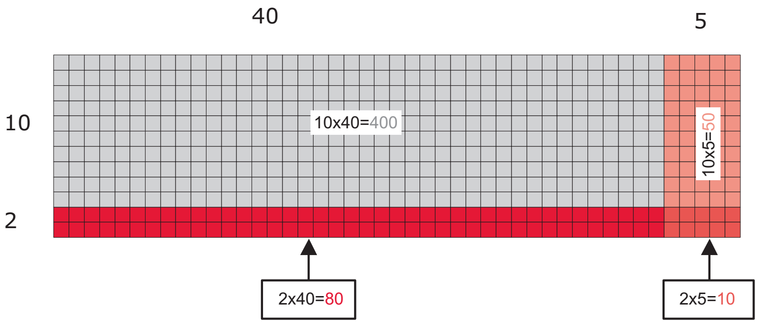


Figura 10 – (2x3)x4

O exemplo *Caixas de bombons* mostra que é essencial que os alunos estejam aptos a seleccionar, usar e mover-se entre diferentes representações matemáticas quer para resolver problemas, quer para comunicar. É um facto que nem todos estão aptos ao mesmo tempo, e para a mesma proposta, a trabalhar com o mesmo modo de representação. Por esta razão é essencial que possa coexistir mais do que um modo na exploração de uma mesma situação e que se desencadeiem processos de comunicação que permitam estabelecer conexões entre os diferentes tipos.

As crianças, como os adultos, enriquecem ou modificam o seu conhecimento pelo facto de o construírem sobre o que já conhecem. Assim, quanto mais diversificadas as representações a que os alunos têm oportunidade de ligar novos conceitos ou procedimentos, mais provável é que possam recorrer a conhecimentos anteriores que constituam âncoras para as novas ideias.

As representações podem não ser espontaneamente criadas pelas crianças, mas serem apresentadas pelos professores para ensinar um conceito ou dar sentido a um procedimento. Veja-se, por exemplo, o modelo rectangular apresentado na figura 11 (adaptado de Englert e Sinicrope, 1997) que facilita a transição da multiplicação por um número de um algarismo para a multiplicação por números de dois algarismos.



45	45
x12	x12
10	90
80	45
50	540
400	
540	

Figura 11 – Modelo rectangular que ilustra a multiplicação por um número de 2 algarismos

Note-se que o modelo rectangular – representação icónica – permite dar sentido ao algoritmo convencional – representação simbólica – pelo recurso a um algoritmo intermédio. É um facto que este último algoritmo também é simbólico. No entanto, corresponde a uma tradução mais directa do modelo rectangular, o que permite estabelecer a ligação entre a representação icónica, correspondente ao modelo, e as representações simbólicas.

Um dos aspectos das representações simbólicas que merece especial atenção é a linguagem, tanto na sua dimensão escrita como na dimensão oral.

Na comunicação das ideias matemáticas, a linguagem específica da Matemática ocupa um lugar de destaque porque serve para pensar e comunicar sobre objectos que, sendo matemáticos, a ela se adequam. No entanto, os alunos começam por pensar sobre os conceitos matemáticos através da linguagem natural e ir, progressivamente, integrando aspectos da linguagem matemática. Uma das dificuldades que este processo, por vezes, encontra é o do uso do mesmo termo por ambas as linguagens, mas com sentidos diferentes. Por exemplo, a palavra "área", em linguagem corrente, tem um sentido um pouco vago que pode significar "região" ou "domínio" (Ponte e Serrazina, 2000). No entanto, no contexto da Matemática, a mesma palavra tem um sentido preciso – o de uma grandeza. Veja-se, ainda, o exemplo da figura 12 em que o uso da expressão "maior", além de desadequada, pode induzir em erro, se bem que, aqui, essa indução seja, também, sugerida pela ilustração.

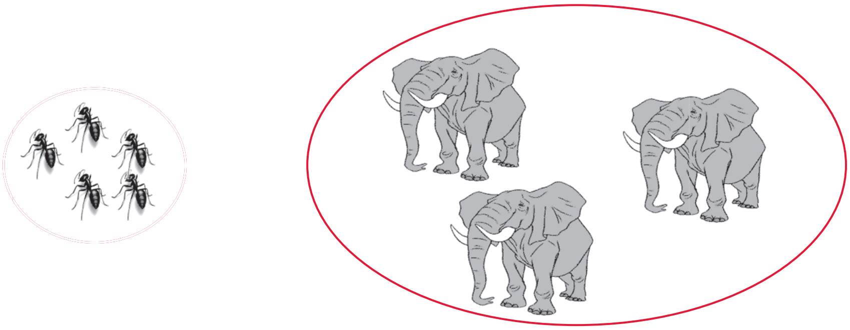


Figura 12 – Qual conjunto é maior?

Este tipo de mal-entendidos deve ser prontamente esclarecido através de uma discussão em torno do(s) termo(s) em causa. Estas discussões não têm por objectivo opor um tipo de linguagem ao outro, mas tão somente contribuir para os alunos compreenderem, desde cedo, a necessidade de definições e argumentos coerentes em Matemática.

Uma das características mais marcantes da linguagem matemática é a sua precisão. A precisão e o rigor que ela espelha têm que ser interiorizados pouco a pouco, a partir da linguagem natural, sem um formalismo excessivo no 1.º ciclo. Os alunos precisam de reconhecer o valor de definições precisas e o papel dos termos convencionais da Matemática a partir de um trabalho de envolvimento com os conceitos matemáticos que lhes permita comunicá-los pelas suas próprias palavras.

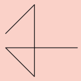
O episódio *Vamos estudar os quadriláteros* (adaptado de NCTM, 1994) reflecte bem o aperfeiçoamento, no sentido de um maior rigor, da linguagem natural até ao estabelecimento de uma definição matematicamente aceite. A professora está a iniciar uma unidade de geometria com os seus alunos de 4.º ano e condu-los, habilmente, de uma definição pouco, ou nada, rigorosa de quadrilátero proveniente de uma formulação incompleta de um aluno, até à definição mais formal enunciada no manual escolar.

Vamos estudar os quadriláteros

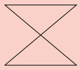
Professora: Vamos estudar os quadriláteros. O que é que vocês sabem sobre quadriláteros?

Coro de diversos alunos: Quatro lados, figura com quatro lados.

A professora desenha no quadro e pergunta: Este é?



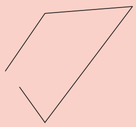
Alunos: Não, tem que ficar ligado.



Professora: Então é assim?

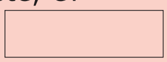
Diversos alunos: Não, não pode cruzar-se assim.

A professora continua a desenhar e pergunta: Então e este?



Aluno: Tem de fechar.

A professora desenhando: Está bem. Então e este, é?



Alunos: Sim! Sim! Sim!

A professora faz uma pausa e olha directamente para os alunos: Desenhei quatro exemplos. Vocês disseram que três deles não serviam. Conseguem explicar essa diferença?

Alguns alunos avançam voluntariamente com partes da definição de "quadrilátero". A professora, respeitando a terminologia dos alunos, regista as suas ideias no quadro:

QUADRILÁTEROS

4 pontos	4 segmentos
Não se cruza	Todo fechado

Sintetizando, a professora diz: Realmente vocês têm aqui muito do que é importante para definir quadrilátero. No vosso livro diz: "a porção do plano limitada por quatro segmentos de recta que se intersectam apenas nos seus extremos."

O tipo de ensino ilustrado pelo episódio permite aos alunos um forte envolvimento com a Matemática que poderia ficar comprometido se o formalismo da definição fosse o ponto de partida. Um caminho entre a linguagem natural e a linguagem simbólica é aqui habilmente traçado pela professora, através do confronto sistemático dos alunos com contradições.

A linguagem simbólica é um dos aspectos da linguagem matemática que se evidencia, particularmente, quando pensamos na dimensão escrita da comunicação matemática. O recurso aos símbolos é inerente ao trabalho em Matemática e há boas razões para isso: permite uma escrita condensada, facilita a precisão e permite, em muitos casos, usar processos de cálculo bastante expeditos. Os símbolos são um importante auxiliar do raciocínio matemático, mas só servem este propósito se forem bem compreendidos. Exigir que um aluno trabalhe com símbolos ou com representações simbólicas, sem ser capaz de os relacionar com os referentes significativos, pode comprometer quer o seu gosto pela Matemática, quer o seu sucesso.

Assim, o caminho da linguagem simbólica deve ser percorrido cautelosamente, em termos das suas ligações ao significado dos conceitos e à linguagem natural, mas consistentemente no que respeita ao rigor.

A concluir

Apresentou-se, neste capítulo, uma perspectiva multidireccional e multifacetada da comunicação matemática na sala de aula que favorece, significativamente, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Valorizar a comunicação corresponde a assumir que a Matemática é uma actividade humana, criativa e social e que a sua aprendizagem se desenvolve a partir da interacção entre todas as pessoas da aula: professor e alunos.

As interacções que ocorrem no desenrolar da actividade matemática despoletada por uma tarefa, criam inúmeras oportunidades de aprendizagem que dificilmente surgem numa aula de trabalho individualizado em que a interacção fica, frequentemente, confinada à apresentação, no quadro, de procedimentos usados para obter a solução. A partilha de estratégias de resolução em pequeno ou grande grupo permite, não só, que os alunos verbalizem o seu pensamento, tendo para isso que o organizar, como ainda que expliquem e justifiquem as suas resoluções. Permite, também, que possam pedir esclarecimentos aos seus colegas, obrigando todos a uma constante reformulação do seu pensamento. Assim, a comunicação matemática pode facilitar uma melhor compreensão e interiorização dos conceitos envolvidos, a incorporação de processos alternativos de resolução e a construção de conhecimentos de longa duração. Neste sentido, fala-se de comunicação como um meio para desenvolver mais e melhores compreensões: comunicar para aprender.

Comunicar para aprender e aprender a comunicar são duas faces da mesma moeda. Uma das dimensões não existe sem a outra. No entanto, quando se equacionam os propósitos de ensinar Matemática na educação básica é a primeira das dimensão que deve nortear o trabalho do professor.

Alcançar estes propósitos depende, fundamentalmente, de dois aspectos: uma escolha criteriosa das tarefas a propor aos alunos e a criação de uma cultura de sala de aula que contemple espaço/tempo para interacções adequadas, aspecto que se retomará no capítulo 5. As tarefas devem proporcionar o aparecimento de tópicos de discussão poderosos e interessantes. A cultura da sala de aula tem que permitir que os alunos de forma organizada, livre e não constrangedora, partilhem as suas ideias e raciocínios.

ARGUMENTAÇÃO em MATEMÁTICA

É numa sociedade democrática, em que podem viver as discussões, os debates, os desacordos, que uma actividade de comunicação, como é a argumentação, se pode desenvolver.

(Pedemonte, 2002)

4.1 Introdução

À primeira vista, pode parecer estranho falar em argumentação em Matemática, ou, mais concretamente, falar em argumentação quando se trabalha em Matemática com os alunos. Afinal, no imaginário de muitos, a Matemática continua a ser uma disciplina em que os resultados a que se chega ou estão certos ou estão errados, consoante se siga, ou não, as indicações dadas pelo professor, pelo manual escolar ou por quem tem autoridade na matéria. Nesta concepção, não há grande lugar para actividades argumentativas, se as entendermos como experiências particulares de aprendizagem cujo foco é a Matemática e que assumem a forma de raciocínios destinados seja a fundamentar ideias associadas à exploração de tarefas matemáticas, seja a convencer alguém a aceitar ou a rejeitar enunciados ou posições pela indicação de razões.

Como se procurou sublinhar na introdução desta brochura, conceder, na sala de aula, um lugar de destaque à argumentação em Matemática está intimamente associado à importância de os alunos desenvolverem *a capacidade de raciocinar matematicamente* – no sentido atribuído a esta expressão por Ponte et al. (2007) – e de aprenderem Matemática com compreensão. Com efeito, há hoje amplas evidências de que as crianças, mesmo quando o seu pensamento se situa ainda ao nível das operações concretas, são capazes de realizar acções encadeadas com objectos diversos, de modo a justificar uma afirmação, tendo por pano de fundo o raciocínio dedutivo. Há, também, diversos estudos reveladores de que, em ambientes adequados, os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, são capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contra-exemplo, de reflectir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos.

Este capítulo centra-se nos contornos que a argumentação em Matemática pode assumir quando se trabalha com alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Em primeiro lugar, procurar-se-á destacar algumas características deste processo matemático. Em seguida, serão apresentados possíveis contextos e percursos argumentativos, tendo por pano de fundo o currículo de Matemática dos primeiros anos de escolaridade e a maturidade matemática dos alunos destes níveis.

4.2 Argumentação em Matemática: características e significado

Observem-se algumas das características da actividade de argumentar em Matemática, partindo da análise de episódios de sala de aula e de tarefas matemáticas.

4.2.1 A natureza discursiva da argumentação

A turma de João e Maria estava a dar os primeiros passos na aprendizagem da operação multiplicação. Pouco depois de os alunos concluírem que 2 x 6 = 12, o professor propôs que descobrissem qual é o produto de 4 por 6. Potencialmente, a tarefa constituía um problema para os alunos, na medida em que não tinham nenhum procedimento conhecido a que pudessem recorrer para calcular o produto. Veja-se o processo seguido por João e Maria, adaptado de um episódio apresentado por Krummheuer (1995).

A argumentação de João e de Maria: 4x6=?

João: Quanto é que é 12 mais 12?

Maria: 24.

Professor: Porque é que perguntaste quanto é 12 mais 12, João?

João: Porque quatro conjuntos... quatro... Dois conjuntos de seis são 12.

Maria: São quatro conjuntos de seis. 12 mais 12 é igual a 24.

João: Pois. 4 vezes 6 é igual a 24.

Professor: Siiiiiim...

Maria: Tem mais dois conjuntos de seis. 2 mais 2 são 4 (levanta dois dedos de cada mão).

Claro que haveria muitos outros caminhos para concluir que 4x6=24. Analise-se, no entanto, o raciocínio dos dois alunos, procurando destrinçar as suas componentes e respectivas funções. João e Maria, para fundamentarem que 4x6=24, apoiam-se em dois factos que parecem não questionar: *dois conjuntos de seis são 12; 12 mais 12 é igual a 24.* Afirmações deste tipo podem designar-se por *dados* (Toulmin, 1993). Os dados funcionam como ponto de partida de um percurso argumentativo. São factos que não são postos em causa por quem argumenta e que são invocados para apoiar a *conclusão* entendida como algo que se pensa estar correcto e de que se procura estabelecer o valor.

Para além de se apoiarem nos referidos factos, João e Maria recorreram a diversos elementos justificativos para estabelecerem a sua conclusão. Por exemplo, *são quatro conjuntos de seis* e *[4x6] tem mais dois conjuntos de seis [do que 2x6]*. Estas justificações respondem à questão de saber porque é que o facto de conhecermos que *dois conjuntos de seis são 12* e que *12 mais 12 é igual a 24* permite concluir que 4x6=24. Funcionam, assim, como pontes, como uma espécie de "licença" de inferência que autoriza a passagem dos dados à conclusão mostrando que esta passagem é oportuna e legítima. Toulmin designa justificações deste tipo por garantia e considera que o esqueleto mínimo de uma argumentação é formado pelos três elementos: *dados – garantia – conclusão*.

Pode acontecer que, numa argumentação, surjam desacordos ou dúvidas sobre a própria validade da garantia. Nestes casos, há que recorrer a novos elementos justificativos cuja função é ancorar a garantia, ou seja, fundamentar porque é que deve ser aceite. No caso em análise, Maria, ao enunciar que 2 mais 2 são 4 levantando, simultaneamente, dois dedos de cada mão, responde à questão de saber porque é que quatro conjuntos de seis têm mais dois conjuntos de seis do que 2x6. Nesta medida, estas justificações fundamentam a garantia anteriormente apresentada. Toulmin designa estes elementos que apoiam a garantia, por *fundamento*, referindo que podem, ou não, aparecer numa argumentação, dependendo do contexto em que ela se desenvolve.

A argumentação desenvolvida por João e Maria envolveu, fundamentalmente, dois protagonistas: estes alunos. Note-se, no entanto, que a explicitação dos dados em que se apoiaram para justificarem que o produto de 4 por 6 é 24, surge a partir da pergunta do professor: *Porque é que perguntaste quanto é 12 mais 12, João?* Além disso, é esta pergunta que, a par de uma outra intervenção aparentemente destinada a alimentar o discurso dos alunos – *Siiiiiim...,* desencadeia a emergência de justificações diversas. Em conjunção, estas observações permitem destacar a importância do papel do professor no desenrolar dos percursos argumentativos.

Esta importância sobressai, também, se se considerar a possibilidade de o professor solicitar a João e Maria que apresentem à turma a descoberta feita. Neste caso, poderiam ocorrer situações de diverso tipo. Por exemplo, os colegas podiam questionar os dados de que partiram, nomeadamente por não compreenderem porque é que 12+12=24. Ou o próprio professor poderia entender que devia solicitar-lhes explicações sobre a obtenção de 24 a partir da adição das duas parcelas. Em qualquer dos casos, seria necessário desenvolver uma argumentação complementar cuja conclusão a estabelecer seria 12+12=24 até que esta fosse aceite pela turma como matematicamente válida. Só a partir daí poderia ser considerada um dado para novas argumentações.

Poderia, também, acontecer que João e Maria se limitassem a enunciar a sua conclusão. Neste caso, poderia não ser transparente para alguns colegas qual a relevância de adicionar 12 com 12 para concluir que o produto de 4 por 6 é 24 e a compreensão do raciocínio ficaria comprometida. O papel do professor é aqui fundamental, pois, questionando João e Maria sobre o porquê desta adição, torna visível porque é que, partindo dos dados, a passagem à conclusão é legítima. E o mesmo se pode dizer em relação à apresentação de fundamentos para a garantia, caso o professor considere existirem elementos da turma para quem a sua aceitabilidade não é perceptível.

Observando, globalmente, a argumentação de João e Maria, constata-se que os alunos se serviram da linguagem natural como utensílio de comunicação, o que remete para a *natureza discursiva da argumentação*. Esta é uma das características da argumentação em Matemática, o que não significa que ela exclua a mobilização de elementos não discursivos como sejam materiais manipuláveis, figuras, desenhos, tabelas, gráficos, números ou expressões numéricas ou algébricas. Aliás, estes alunos, a par da linguagem natural, recorreram, também, a linguagem gestual e a símbolos matemáticos para explicarem o seu raciocínio. Constata-se, ainda, que João e Maria apresentaram justificações de tipo diverso para fundamentar a descoberta do produto de 4 por 6. O *carácter justificativo* é, precisamente, outra das características da argumentação em Matemática. Só que na sala de aula, é comum que as situações de argumentação envolvam vários protagonistas e, frequentemente, as justificações surgem entrelaçadas com explicações destinadas a clarificar aspectos do pensamento de uns que não são evidentes para outros.

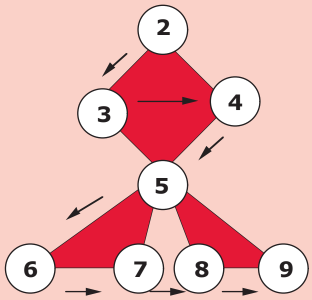
Assim, nesta publicação, entende-se por argumentação em Matemática, conversações de carácter explicativo ou justificativo centradas na Matemática, em que assumem um papel preponderante a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjecturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático.

4.2.2 A natureza dialéctica da argumentação

A argumentação é uma tentativa de justificar uma ideia, ou conjunto de enunciados, a partir daquilo que se crê como verdadeiro, um processo em que as inferências se apoiam, principalmente, sobre os conteúdos daquilo que se enuncia. Os raciocínios envolvidos podem não conduzir, necessariamente, a conclusões verdadeiras. No entanto, têm por base ideias consideradas verdadeiras por quem argumenta e, assim, a argumentação em Matemática é *dialéctica* (Pedemonte, 2002). Observe-se esta característica a partir de uma possível exploração da tarefa *Números em Círculos* (adaptada de Boavida e Guimarães, 2002).

Números em Círculos

Considerar o esquema representado na figura. A parte superior é formada por um quadrilátero em cujos vértices foram desenhados quatro círculos e a parte inferior por dois triângulos com círculos em todos os vértices. O círculo central está desenhado sobre o vértice comum aos três polígonos. Em cada círculo escrevem-se números naturais consecutivos, começando no círculo superior e seguindo o sentido das setas, tal como é exemplificado.



Adicionar os quatro números colocados nos vértices do quadrilátero, depois os três números colocados nos círculos do triângulo da esquerda e, em seguida, os do triângulo da direita. Por fim, adicionar as três somas obtidas. Esta soma final é designada por *Grande Total.*

Encontrar uma relação entre os números representados no círculo central do esquema e os *Grandes Totais* obtidos.

Os requisitos matemáticos necessários à exploração desta tarefa são o conhecimento dos números naturais e suas representações, da estrutura do sistema de numeração decimal e das operações aritméticas elementares. Todos estes tópicos estão contemplados no currículo do 1.º ciclo do ensino básico, pelo que a tarefa pode ser proposta a alunos destes anos.

A realização de algumas experiências, de que as representadas na figura 1 são exemplos, revela que há uma regularidade que se mantém nos casos analisados: em qualquer deles o Grande Total termina em 4.

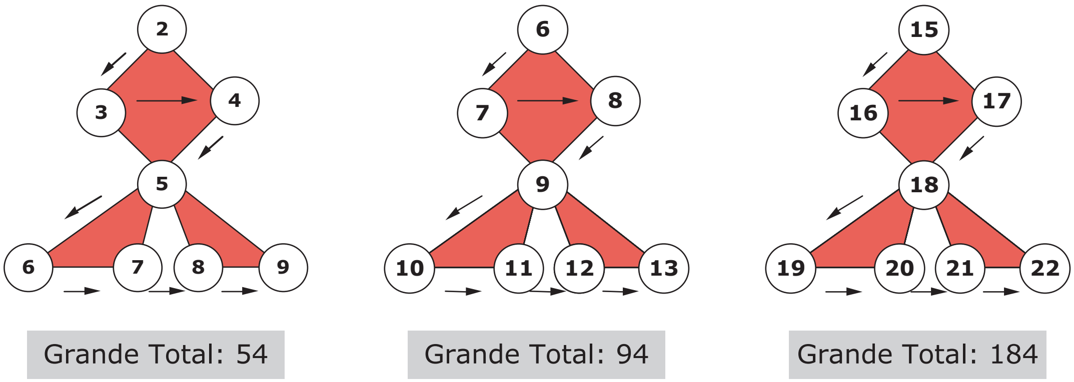


Figura 1

Uma observação mais atenta, que pode ser acompanhada, ou não, de novas experiências, mostra que à esquerda do 4, os números que surgem são, em cada caso, os que estão representados no círculo central do esquema.

Frequentemente, quando se explora esta tarefa com alunos de vários níveis de ensino, a primeira relação que enunciam, baseando-se nas experiências realizadas, é: *o Grande Total é igual ao número do centro seguido de quatro* (conjectura 1). Quando confrontados com a questão "será que a relação se mantém para outros casos?", fazem novas experiências e é usual que passado pouco tempo afirmem, convictamente, que a relação é verdadeira para todos os números naturais. Argumentam, apoiando-se na definição de números consecutivos, na correcção dos cálculos feitos e na constatação, fundada na observação, de todos os exemplos observados verificarem a relação. Como garantia, apresentam o facto de terem analisado muitos casos e não terem descoberto nenhum que não satisfaça a relação.

Esta garantia constitui um argumento empírico, pois baseia-se na análise de exemplos. Os argumentos empíricos são possíveis, legítimos e, muitas vezes, valiosos, numa argumentação. Em casos muito diversos, são eles que sustentam a formulação de conjecturas, entendidas como enunciados plausíveis, mas de validade provisória, bem como a justificação desta plausibilidade. Estes argumentos podem ser mais ou menos sofisticados.

Por vezes, e sobretudo nas primeiras experiências de formulação e avaliação de conjecturas, os alunos concluem que as conjecturas são verdadeiras para a generalidade dos objectos do universo em que trabalham, a partir da sua verificação por um pequeno número de casos. Por exemplo, sabem que os números 3, 5 e 7 são ímpares, constatam que cada um destes números só tem dois divisores e concluem, incorrectamente, que todos os números ímpares têm apenas dois divisores. Extrair da observação de um pequeno número de casos a certeza sobre a veracidade de uma afirmação, corresponde ao primeiro nível da hierarquia dos tipos de procedimentos de validação de uma afirmação, referida por Balacheff (1987), que o designa por *empirismo naïf*.

Outras vezes, os alunos lidam mais explicitamente com a questão da generalização, examinando muitos exemplos e analisando casos a que, naturalmente, não recorremos (casos extremos). Por exemplo, na tarefa *Números em Círculos* fazem experiências com números da ordem das centenas ou dos milhares, iniciando o esquema com números do tipo 1721 ou 849. Este procedimento traduz uma evolução dos alunos, correspondendo ao segundo nível da referida hierarquia: a *experiência crucial*.

A ideia de que se pode tirar conclusões acerca da validade geral de uma conjectura a partir da sua verificação por alguns casos, é muito persistente nos alunos e não se altera facilmente. Este facto não é de estranhar, tanto mais que, no dia a dia, se tomam muitas decisões baseadas no raciocínio indutivo que lhe está subjacente. Por exemplo, se sabe que durante o último mês o carteiro chegou por volta das 10 horas da manhã e se aguarda uma carta importante, naturalmente, espera que hoje também chegue à mesma hora e agendará os seus compromissos tendo em conta este facto. Só que, em Matemática, raciocínios deste tipo, tal como argumentos empíricos, não permitem fundamentar conclusões gerais. Assim, é importante ajudar os alunos a entenderem que a verificação de uma afirmação através de exemplos não permite garantir a sua validade para casos não analisados. Trata-se de um grande desafio a quem ensina Matemática em diferentes níveis de ensino e que se reveste de dificuldades acrescidas no 1.º ciclo do ensino básico, onde não é possível o recurso a certos instrumentos matemáticos que poderiam facilitar este trabalho, mas não seriam inteligíveis para os alunos.

Retomando a tarefa *Números em Círculos* e a conjectura 1 *(o Grande Total é igual ao número do centro seguido de quatro)*, há duas questões que podem colocar-se:

- como ter a certeza de que esta conjectura é, de facto, válida para todos os números naturais?
- porque é que é válida?

Ambas as questões remetem para a necessidade de encontrar uma justificação que garanta a validade da conjectura e que ilumine o porquê desta validade. Trata-se, afinal, de produzir uma prova matemática – neste capítulo designada por prova –, considerada enquanto instrumento de validação e de compreensão. A prova é, aqui, entendida como um modo de expressar determinados tipos de justificações que podem ter formatos e níveis de sofisticação variados, consoante a maturidade matemática dos alunos, mas que, em qualquer caso, lidam com a questão da generalidade: a conjectura/afirmação é válida para todos os casos do universo em que trabalhamos? Porque o é, ou porque não o é?

Compreender porque é que a conjectura 1 é válida começa, antes de mais, por interpretar o significado de "número do centro seguido de 4", o que nem sempre é fácil para os alunos. Implica um bom entendimento da estrutura do sistema de numeração decimal. Requer que seja inteligível que, quando se justapõe um dígito à direita de um número natural, este dígito passa a ocupar a ordem das unidades e os restantes sobem de ordem. Por exemplo, ao justapor 4 à direita de 7 obtendo 74, as 7 unidades de que se partiu transformam-se em 7 dezenas, ou seja, 70 unidades que são adicionadas a 4.

Neste processo, o professor é fundamental para ajudar os alunos a evoluírem de uma conjectura enunciada com base na observação visual dos números que se procura relacionar (conjectura 1), para uma formulação alternativa fundada nas relações matemáticas subjacentes. Neste contexto, uma possível reformulação da conjectura 1 é: o *Grande Total é igual a 10 vezes o número do centro mais 4* (conjectura 2). De seguida, o professor pode desafiar os alunos a produzirem a prova desta conjectura ou a participarem na construção colectiva dessa prova, sob sua orientação. Se o entender, pode, por exemplo, começar por sugerir que partam de uma das experiências feitas e que relacionem todos os números do esquema com o número do centro usando as operações adição e subtracção. Pode, também, iniciar o estabelecimento destas relações para que os alunos, por analogia, prossigam o processo. Por exemplo, pode destacar que se o número central for 5, o 4, que no esquema o antecede, pode representar-se por 5-1 e o 6, que lhe sucede, por 5+1. Por esta via, o primeiro esquema da figura 2 transforma-se no segundo.

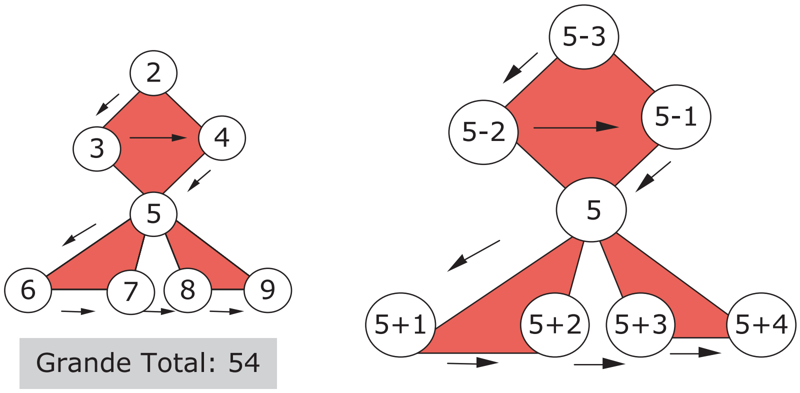
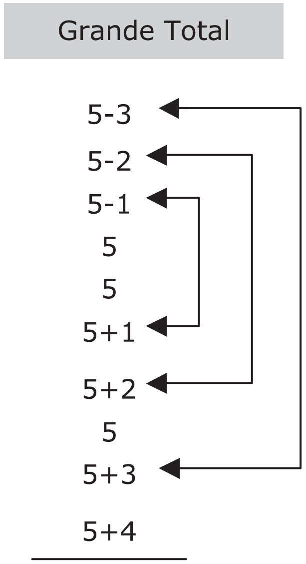


Figura 2

A partir daqui, os procedimentos que conduzem ao Grande Total podem ser representados de modo a evidenciar o número de vezes que se adiciona o 5, bem como a existência de adições e subtracções de vários números iguais (por exemplo, figura 3).



Dez "cincos" e um quatro

Figura 3

Constata-se, assim, que, para calcular o Grande Total, se adiciona dez vezes o número 5, obtendo-se 10 x 5, ou seja 50. Constata-se, ainda, que basta adicionar 4 a este produto, visto que o resultado das operações com os todos os números, exceptuando 4 e 5, é 0 (em virtude de 3-3 ser igual a 0 e o mesmo acontecer com 2-2 e 1-1).

O raciocínio apresentado a propósito do caso em que o número central é 5, é transponível, sem qualquer problema, se no círculo central estiver outro número natural qualquer. Com efeito, se recorrermos à simbologia algébrica e representarmos o número central por x, a representação do número que o antecede é x-1, o anterior a este é x-2, o sucessor de x é x+1 e assim sucessivamente. Através de cálculos algébricos elementares, que têm fortes analogias com os efectuados a propósito do exemplo analisado, facilmente se concluirá que o Grande Total é igual a 10x+4.

A maturidade matemática dos alunos do 1.º ciclo do ensino básico não é, ainda, suficiente para poderem recorrer ou, até mesmo, compreender estas representações e procedimentos algébricos. No entanto, é inteligível para estes alunos, que o raciocínio seguido a propósito do caso particular continua a ser válido se, no lugar do 5, estiver qualquer outro número: no cálculo do Grande Total há sempre três pares de números cuja soma é zero; além disso, tem sempre que se adicionar 10 números iguais ao do círculo central, o que vai originar um número terminado em zero e em que o(s) algarismo(s) à esquerda do zero são o(s) do círculo central; por último, só sobra o 4 que, como é adicionado a um número terminado em zero, vai ocupar "o lugar" das unidades.

O processo a que se recorreu, apesar de apoiado num exemplo, lidou, assim, com a questão da generalidade. Além disso, os argumentos apresentados são matematicamente válidos e encadeiam-se uns nos outros de tal modo que uma ideia flui da anterior sem restarem "pontas soltas" ou contradições, até se estabelecer a veracidade da relação descoberta. Este processo constitui, pois, uma argumentação convincente e matematicamente correcta que mostra a validade das conjecturas 1 e 2 para todos os números naturais. Pelas razões apresentadas, pode considerar-se uma prova pelo recurso ao *exemplo generalizável*. Este é um processo de prova usado por diversos matemáticos no século XVII, que consiste em provar uma afirmação recorrendo a um caso particular, mas através de raciocínios que convencem que a prova é válida no caso geral (Veloso, 1998).

É de sublinhar que esta prova apareceu associada à actividade de formulação de conjecturas cuja validade para todos os casos não era, de imediato, óbvia. O que constituiu o motivo e o motor da prova foi a necessidade de, por um lado, garantir esta validade e, por outro lado, entender o seu porquê. Deste modo, a prova surge como um instrumento que serve não só, para nos convencer sobre a validade das conjecturas no universo dos números naturais, mas também como um meio de progredir na compreensão da tarefa *Números em Círculos*.

É este duplo papel da prova que hoje se valoriza. Uma boa prova é aquela que, para lá de convencer, explica, faz avançar na compreensão de uma ideia, problema ou resultado matemático e clarifica porque é que uma relação funciona ou não. Neste âmbito, o formato de uma prova deve subordinar-se à possibilidade de compreensão e, por isso, deve ser adequado ao nível de escolaridade e contexto de ensino. Mais importante do que o formato de uma prova é a actividade de a produzir, é a comunicação clara e correcta das ideias matemáticas que estão em jogo, é a sensibilidade para o seu interesse e necessidade.

Analisando, globalmente, a exploração da tarefa *Números em Círculos*, constata-se que alunos que afirmam, convictamente, que a conjectura 1 ou a conjectura 2 são verdadeiras para todos os números naturais, apoiando-se na observação de casos particulares e na impossibilidade de encontrarem algum que não verifique a relação, apresentam argumentações. No entanto, só a partir do momento em que estas argumentações deixam de se apoiar em argumentos empíricos deste tipo, é que se está perante um raciocínio que pode considerar-se uma prova. A prova, estando sujeita a constrangimentos próprios, é, assim, um caso particular da argumentação em Matemática (Pedemonte, 2002). Por exemplo, o discurso argumentativo, embora seja um discurso conectado logicamente, não é necessariamente dedutivo. Além disso, pode englobar justificações que envolvam o recurso a analogias, metáforas, argumentos visuais, gestuais ou empíricos. Nada disto é permitido quando se trata de provar, do ponto de vista matemático, uma afirmação.

Nem sempre os alunos conseguem provar as conjecturas formuladas, nem sequer acompanhar uma prova apresentada pelo professor. Este facto não constitui um factor negativo, pois a actividade de formulação de conjecturas tem, em si mesmo, valor educativo. Além disso, este facto pode proporcionar boas oportunidades para os alunos começarem a compreender a natureza do trabalho em Matemática onde a formulação de conjecturas e a sua prova, frequentemente, não ocorrem em simultâneo. O que é importante nestas ocasiões é o professor sublinhar que o estatuto de uma afirmação não provada é o de conjectura.

4.2.3 O carácter social da argumentação

Na sala de aula, a argumentação desenvolve-se como um conjunto de interacções face a face que mobiliza, frequentemente, vários protagonistas. Estamos, assim, na presença de *argumentações colectivas* que nem sempre ocorrem de maneira harmoniosa, pois podem surgir desacordos que conduzem a correcções, modificações ou desvios. Esta característica remete para o *carácter social da argumentação* e para a importância do outro no desenvolvimento das actividades argumentativas.

De facto, quando se fala em argumentação, não podemos deixar de considerar aquele, ou aqueles, que quem argumenta quer influenciar através das justificações que apresenta, ou seja, o *auditório* a quem se dirige. No caso da actividade argumentativa em Matemática, este auditório pode restringir-se a um aluno que delibera consigo próprio. Pode, também, ser constituído por alguém com quem se estabelece um diálogo, por um grupo de colegas ou pela turma na sua globalidade. Pode, ainda, ser formado pela comunidade matemática, considerada em sentido amplo. Em qualquer dos casos, trata-se de um *auditório universal*, no sentido em que é um auditório racional que pode, ou não, concordar com quem argumenta, mas que, em todos os casos, está apto a responder (Perelman, 1993).

O valor de uma argumentação não pode ser avaliado apenas a partir do efeito obtido, pois depende das características do auditório que lhe adere. Neste âmbito, o professor tem um papel fundamental para ajudar os alunos a apropriarem-se dos saberes matemáticos reconhecidos como válidos pela comunidade matemática. Para ilustrar esta ideia, observe-se o episódio *Como representar oitavos na linha numérica?* adaptado de um relato apresentado por Chazan e Ball (1999).

sComo representar oitavos na linha numérica?

Durante cerca de duas semanas, uma turma do terceiro ano de escolaridade trabalhou com fracções consideradas enquanto partes de um todo. Para ajudar os alunos a desenvolverem a compreensão das fracções enquanto números, e não apenas como partes de regiões ou grupos, a professora introduziu a linha numérica onde foram marcados, nomeadamente $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Apoiando-se em modelos de representação familiares (figura 4), os alunos mostraram que quer $\frac{2}{4}$, quer $\frac{1}{2}$ são números que podem usar-se para designar o ponto médio entre 0 e 1 (figura 5).

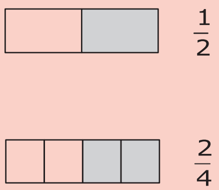


Figura 4

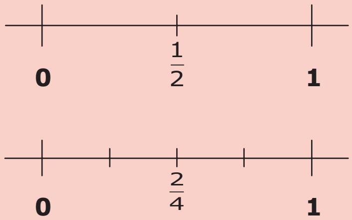


Figura 5

Um dos alunos colocou, então, uma questão que levou a turma a deslocar-se dos "familiares" meios e quartos, para os oitavos com que nunca tinha trabalhado. A professora começou por desenhar no quadro uma linha numérica onde marcou 0 e 1 e dividiu o espaço entre estes números em oito partes iguais (figura 6).

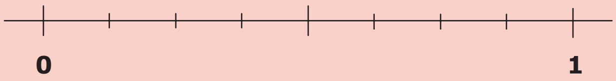


Figura 6

Em seguida, desafiou a turma a representar os números correspondentes a cada um dos tracinhos verticais.

Uma aluna propôs que se fizesse um desenho tipo "bolo" dizendo que bastava cortá-lo em mais pedaços. Baseando-se, aparentemente, só no aspecto visual da linha – ou seja, não considerando o número de divisões existentes entre 0 e 1 – apontou para o terceiro e para o quinto tracinhos e disse que pensava que $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ estavam, respectivamente, aí (figura 7). Não sabia o que fazer no caso do sexto e sétimo tracinhos.

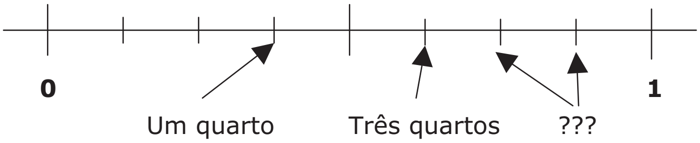


Figura 7

Segundo a professora, este esquema fazia sentido para os alunos, tendo em conta o trabalho anteriormente realizado. Com efeito, tinham usado a linha numérica para, pelo menos, estabelecerem a correspondência entre os números $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ (ou $\frac{1}{2}$) e $\frac{3}{4}$ e três pontos da linha; $\frac{1}{4}$ estava sempre imediatamente à esquerda de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ imediatamente à direita de $\frac{1}{2}$. Além disso, nos números naturais, com os quais os alunos estavam familiarizados, a posição de um terminado número é constante, ou seja, a 2 segue-se sempre 3, a 3 segue-se sempre 4 e assim sucessivamente.

Para imaginar os números que deveria colocar junto ao sexto e ao sétimo tracinhos, a mesma aluna desenhou um rectângulo, dividiu-o em sete partes e começou a sombrear algumas delas. Quando a professora a questionou se, no rectângulo há o mesmo número de partes que há na linha numérica entre 0 e 1, a aluna respondeu negativamente e acrescentou o que parece ser uma justificação para a irrelevância de se considerar, em ambos os casos, o mesmo número de partes: a única coisa necessária é ter partes pequenas.

A professora decide, então, instituir como objecto de reflexão colectiva a correspondência entre uma figura do tipo da que a aluna estava a desenhar – um rectângulo dividido em partes – e a linha numérica desenhada no quadro (figura 6). Para o efeito, coloca questões explicitamente focadas no número de partes em que o rectângulo deve ser dividido e no número de partes que há na referida linha. Esperava que, a partir delas, os alunos sentissem necessidade de estabelecer acordos sobre o modo como deviam usar as figuras enquanto instrumentos para representarem os números (neste caso oitavos) na linha numérica. No entanto, as questões não tiveram o resultado esperado. Todos os alunos concordaram com um colega que afirmava, contando os sete tracinhos existentes na linha numérica entre 0 e 1, que nesta linha existiam sete partes e, por isso, não compreendiam a inadequação de dividirem um rectângulo em sete partes iguais quando se trata de representar oitavos. Todos concordaram com algo que, do ponto de vista matemático, não está correcto.

A professora lida com a situação começando por evocar as memórias da turma. Em particular, recorda uma conjectura, aceite como válida, que indica que, se se quer desenhar um qualquer número de partes numa figura, há que desenhar menos um traço do que o número de partes pretendidas. Além disso, desenha no quadro uma linha numérica em que o intervalo entre 0 e 1 está dividido em 4 partes iguais e relembra que todos concordaram que aí havia 4 partes, apesar de só existirem três tracinhos. Sublinha, ainda, que, no caso dos oitavos, estão a contar as partes de um modo diferente. Por esta via, insere na conversação que ocorria, uma voz essencial que não tinha surgido até ao momento, esperando que provocasse, nos alunos, um questionamento conducente à constatação de que o seu modo de pensar é incorrecto. Este movimento também não originou o efeito esperado: os alunos pareciam não ver a inconsistência entre o que anteriormente tinham feito e aquilo com que, no momento, concordavam.

O acordo a que os alunos chegaram quanto à interpretação da linha numérica, torna impossível conectá-la com outras representações de fracções com que estavam familiarizados: rectângulos ou círculos divididos num certo número de partes iguais. Compromete, por isso, o recurso ao seu conhecimento sobre o conceito de fracção para aprofundarem a compreensão deste conceito, nomeadamente que as fracções também são números. Tudo isto leva a que a professora prossiga com uma exploração problematizadora da situação, pois considera-a essencial para que possam avançar no seu conhecimento matemático. Apoiando-se, em primeiro lugar, na linha numérica desenhada no quadro, destaca que lhe parece que os alunos não estão a contar uma das partes em que a linha está divida (figura 6) e pergunta porquê. Depois, considera como um dado a existência de sete partes entre 0 e 1 (consensual para os alunos) e confronta-os com a linha numérica representada na figura 8.

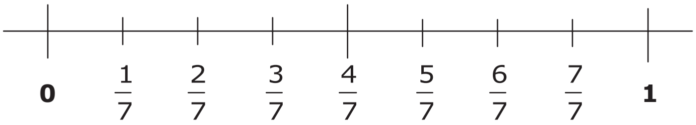


Figura 8

Face ao que conhece sobre os saberes dos alunos relativos ao conceito de fracção (por exemplo, que $\frac{4}{4}$ é igual a uma unidade), a professora espera que, assim, seja inteligível para a turma quão problemático é o acordo pois conduz, nomeadamente a que a fracção $\frac{7}{7}$ – que tal como $\frac{4}{4}$ tem o numerador e denominador iguais e por isso é igual a 1 – seja representada à esquerda de 1, o que é impossível.

Em síntese, este caso ilustra que a professora, confrontada com uma ideia consensual entre os alunos mas que é matematicamente incorrecta, considera inadequado não questionar essa ideia. O que estava em causa era um acordo não produtivo e não reflectido que entra em conflito com os saberes estabelecidos em Matemática, ou, por outras palavras, com a comunidade matemática que na sala de aula é representada pelo professor. O não questionamento deste acordo teria implicações muito significativas na aprendizagem dos alunos. E assim, a professora decide inserir na conversação observações e comentários problematizadores do acordo que, a seu ver, ajudam os alunos a avançar na sua compreensão da Matemática. As suas intervenções não foram simplesmente no sentido de dizer ou mostrar à turma o modo correcto de representar os oitavos na linha numérica. No entanto, não foram, também, intervenções genéricas ou neutras do tipo "pensem melhor". O que fez foi incluir, na troca de ideias, representações e comentários substantivos do ponto de vista matemático que ajudaram os alunos a progredir.

Numa situação de argumentação colectiva, de que o caso apresentado é um exemplo, é fundamental que o professor conheça as possibilidades e constrangimentos conceptuais dos seus alunos e tenha um conhecimento profundo dos conceitos matemáticos relevantes subjacentes à Matemática que ensina, bem como dos modos de os ensinar. É a conjunção destes saberes que contribui para que reconheça a necessidade de fazer surgir apoios argumentativos apropriados. Foi a introdução da voz da professora na conversação que transformou o auditório, apenas constituído pelos alunos, num outro mais crítico e informado, o que contribuiu quer para perderem força argumentos apresentados, quer para surgirem outros matematicamente mais relevantes. O sucesso de uma argumentação depende, assim, não apenas da sua solidez lógica, mas também do grau em que um certo conjunto de argumentos convence um determinado auditório acerca da veracidade de uma conclusão.

4.3 Contextos e percursos argumentativos

As actuais orientações curriculares em Matemática, colocam a ênfase na importância de os alunos encontrarem sentido nas ideias e procedimentos matemáticos, de explicarem o seu pensamento e métodos de resolução e de indicarem as razões que os fundamentam, de modo a que os outros os compreendam. Não é possível caminhar neste sentido sem lhes proporcionar contextos diversificados em que a explicação e a justificação, que estão no âmago da argumentação em Matemática, tenham um lugar de destaque.

Por vezes, estes contextos passam por uma escolha criteriosa de tarefas com determinadas características, nomeadamente problemas e investigações. No entanto, outras vezes, eles surgem a partir de tarefas diferentes, tais como exercícios ou de acontecimentos do dia a dia da aula, desde que o professor os rentabilize para desafiar os alunos a argumentarem. Foi, precisamente, para evidenciar esta ideia que se iniciou o capítulo dedicado à argumentação com o episódio *A argumentação de João e de Maria: 4x6=?.* O importante é que o envolvimento dos alunos em actividades argumentativas seja valorizado nos processos de ensino e aprendizagem de qualquer tópico matemático e não remetido para certos temas particulares ou para ocasiões especiais em que os alunos trabalham com tarefas de determinado tipo.

Apresentam-se, em seguida, exemplos destes contextos potencialmente acessíveis a alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Observe-se, para começar, a tarefa *D.ª Luísa e as escadas*.

> ***D.ª Luísa e as escadas***
>
> A D.ª Luísa, sempre que pode, prefere as escadas ao elevador. Por vezes, sobe as escadas degrau a degrau *(passo)*. Outras vezes, quando está com pressa, salta dois degraus de uma vez, ou seja salta e passa por cima de um degrau *(salto)*. Se misturar estas duas maneiras de subir escadas, quantos modos diferentes tem a D.ª Luísa de subir uma escada de 4 degraus? E de 5 degraus? E de 8?

A realização de algumas experiências com escadas de 1, 2 e 3 degraus, revela que há, respectivamente, 1, 2 e 3 modos de subir as escadas:

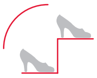
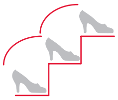
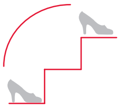
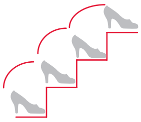
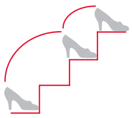
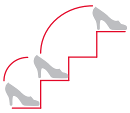
N.º de degraus	modos de subir as escadas	N.º modos
1	 passo	1
2	 passo-passo  salto	2
3	 passo-passo-passo  salto-passo  passo-salto	3

Figura 9

Por observação da figura 9, poder-se-ia pensar que a D.ª Luísa poderá usar quatro modos de subir uma escada de 4 degraus, cinco modos se fossem 5 degraus e assim sucessivamente. Ou seja, o número de modos diferentes de subir uma escada usando o processo da D.ª Luísa, é igual ao número de degraus da escada. Esta *conjectura* até poderá considerar-se plausível pois há, pelo menos, três casos que a verificam. No entanto, será que é verdadeira para todos os casos? Veja-se o que se passa se a escada tiver 4 degraus.

	Modo 1	passo, passo, passo, passo
Modos de subir uma escada de 4 degraus	Modo 2	passo, passo, salto
	Modo 3	passo, salto, passo
	Modo 4	salto, passo, passo
	Modo 5	salto, salto

O exemplo apresentado mostra que há 5 modos de subir uma escada de 4 degraus. Constituiu, assim, um *contra-exemplo* para a conjectura formulada e, por isso, prova que a conjectura é falsa.

Argumentar através de um contra-exemplo é um processo acessível aos alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Através dele, prova-se a falsidade de conjecturas formuladas, o que pode incentivar a sua reformulação e aperfeiçoamento. Por exemplo, se se continuasse a fazer experiências sobre os modos de subir escadas, o seu registo numa tabela mostraria a existência de novas regularidades que poderiam levar a uma conjectura aperfeiçoada:

Número de degraus	Modos de subir as escadas	Número de modos	
1	1. passo	1	
2	1. passo, passo 2. salto	2	
3	1. passo, passo, passo 2. passo, salto 3. salto, passo	3	1+2
4	1. passo, passo, passo, passo 2. passo, passo, salto 3. passo, salto, passo 4. salto, passo, passo 5. salto, salto	5	2+3
5	1. passo, passo, passo, passo, passo 2. passo, passo, passo, salto 3. passo, passo, salto, passo 4. passo, salto, passo, passo 5. salto, passo, passo, passo 6. passo, salto, salto 7. salto, passo, salto 8. salto, salto, passo	8	3+5
6	…	13	5+8
7	…	21	8+13

A análise da tabela permite conjecturar que cada termo (número de modos), a partir do terceiro, se obtém adicionando os dois termos anteriores. Poder-se-ia pensar que o número de modos de subir escadas obedece à conhecida sequência de Fibonacci. Fica o desafio de provar que esta conjectura se verifica seja qual for o número de degraus da escada.

O episódio *Teeteto e os quadrados*, apresentado em seguida, pode constituir, também, um contexto favorável para ensinar os alunos a argumentar através de um contra-exemplo. O episódio remete para um diálogo de Platão em que este filósofo usou o nome de Teeteto para apresentar uma argumentação em torno da variação da medida área de um quadrado em função da variação da medida do comprimento do seu lado.

Teeteto e os quadrados

Professor: Vamos hoje resolver um problema matemático famoso, pela sua história... Pensem num quadrado, já sabem o que é! Se eu aumentar o lado do quadrado, o que acontece?

Filipe: Gasta mais lápis!

Professor: Lá isso é verdade! Isso quer dizer que a quantidade de lápis que gasto aumenta quando aumenta o lado do quadrado! E o que é que aumenta também?

Maria: O tamanho do quadrado!

Rebeca: Claro, isso é evidente! Que problema tão fácil!

Professor: Mas vamos um pouco mais longe. Se eu acrescentar ao lado do quadrado inicial, outro tanto, ou seja, se eu tiver um quadrado com o dobro do lado, qual o aumento da área?

Maria: Passa para o dobro, claro!

Professor: Isso era o que dizia Teeteto, um matemático famoso que viveu há muitos, muitos anos na Grécia... Será que a Maria e Teeteto têm razão? Todos concordam que o segundo quadrado, o que tem o dobro do lado, tem o dobro da área?

Matias: Acho que isso não é verdade!

Professor: Porquê?

Matias: Porque, se eu pensar num quadrado em que o lado é o dobro do outro, o espaço que fica lá dentro é maior do que o dobro.

Professor: Bem, temos aqui duas opiniões. Temos que nos decidir por uma delas. Todos vão construir dois quadrados em papel quadriculado. Um deles tem um lado que é o dobro do outro. Discutam a questão com o vosso colega do lado durante cinco minutos. Depois vão apresentar o que descobriram e logo veremos quem tem razão e porquê.

Não é invulgar que os alunos do 1.º ciclo, e até de outros anos de escolaridade, assumam a posição de Teeteto, justificando-a com argumentos de diverso tipo. A proposta, feita pelo professor no final do episódio, propicia a descoberta de contra-exemplos variados. Com efeito, a área do novo quadrado quadruplica, seja qual for o comprimento do lado do quadrado de partida. A área dos quadrados pode ser obtida por contagem das quadrículas, se se considerar para unidade de medida a área de uma quadrícula. Outra alternativa é usar a fórmula de cálculo da área de um quadrado, tomando como unidade de medida de comprimento o lado de uma quadrícula.

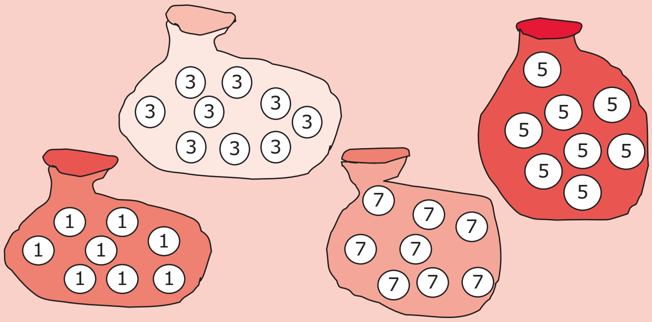
Uma possível extensão do problema colocado pelo professor poderá ser pedir aos alunos para analisarem se é, ou não, válida a afirmação: *se se reduzir cada um dos lados de um rectângulo para metade, a sua área também se reduz para metade*. Neste caso, a área no novo rectângulo reduz-se para a quarta parte. Ou então, colocar-lhes a questão: *o que acontecerá se um lado de um rectângulo for reduzido para metade e o outro aumentado para o dobro? Porquê?*

Como se procurou ilustrar a partir da tarefa *D.ª Luísa e as escadas* e do episódio *Teeteto e os quadrados,* argumentar através de um contra-exemplo pode ser útil para ajudar os alunos a compreenderem os perigos de fazerem generalizações apressadas baseando-se na análise de um pequeno número de casos, o que pode sensibilizá-los para as limitações do raciocínio indutivo. Simultaneamente, pode contribuir para facilitar o desenvolvimento de uma atitude de desconfiança prudente e crítica face a raciocínios que parecem ser válidos.

As tarefas *Os sacos de berlindes* e *Onde estão os animais?* permitem destacar as potencialidades do *raciocínio dedutivo* enquanto processo de provar a consistência lógica de certas descobertas, com base em factos aceites como verdadeiros.

Os sacos de berlindes

Na figura estão representados quatro sacos, cada um com uma grande quantidade de berlindes. Num dos sacos, os berlindes têm o número 1 desenhado, noutro o número 3, noutro o número 5 e noutro o número 7. Tirar 10 berlindes dos sacos de tal modo que a soma dos números seja 37.



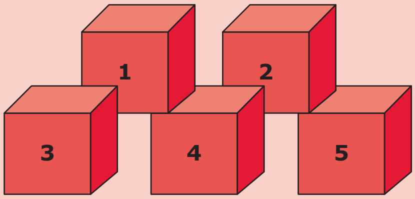
É natural e desejável que, numa primeira fase, os alunos escolham dez berlindes ao acaso e tentem encontrar o total pretendido. Provavelmente, não demorará muito tempo a constatarem que 37 é muito mais difícil de obter do que inicialmente parecia. A questão é saber se, de facto, é impossível chegar a esta soma e porquê. Nesta fase, poderá ser vantajoso, por um lado, o professor incentivá-los a focarem-se nos números que vão encontrando e a analisarem se há alguma característica comum a todos eles. Por outro lado, desafiá-los a obterem 37 tirando um número diferente de berlindes e a reflectirem porque é que, neste caso, o conseguem e no primeiro não.

Estas estratégias poderão ser propícias a que os alunos comecem a intuir que a não obtenção de 37 poderá relacionar-se com o número de berlindes tirados dos sacos e com as particularidades dos números aí desenhados. Todos estes números são ímpares. Ao adicionar dois números ímpares, obtém-se um número par e o mesmo acontece quando se adicionam, 4, 6, 8, 10, ou qualquer outro número par de números ímpares. Assim, é mesmo impossível obter 37 a partir de 10 berlindes: os números que adicionamos são todos ímpares, o número de parcelas da adição é par e 37 é um número ímpar.

Uma possível extensão desta tarefa, favorável ao aprofundamento das ideias matemáticas em jogo, é pedir aos alunos que modifiquem o enunciado de modo a que seja possível obter 37 a partir de 10 berlindes.

Onde estão os animais?

Em cada uma das caixas da figura está um animal. Sabemos que, nas caixas numeradas com números pares, está ou um gato ou um pato. Nas que têm números ímpares, está ou um cão, ou um hamster ou uma tartaruga. Se tirarmos a caixa onde está o hamster, cai a do gato. Se tirarmos a da tartaruga cai a do cão. Onde estará cada animal?



Se os alunos estiverem familiarizados com a noção de número par e de número ímpar, talvez não seja muito complicado descobrirem, através da estratégia de tentativa e erro, que nas caixas 1, 2, 3, 4 e 5 estão, respectivamente, o cão, o gato, a tartaruga, o pato e o hamster. Importa, no entanto, que não fiquem por aqui e que o professor os incentive a reflectirem sobre a tarefa de modo a trazer para primeiro plano os dados de que se parte e o que pode deduzir-se das várias afirmações incluídas no enunciado.

Um dos dados passível de conduzir à descoberta da localização dos animais é o facto de se saber que os números 2 e 4 são pares, enquanto que os restantes são ímpares. Assim, o gato e o pato só podem estar nas caixas 2 ou 4. Resta saber onde está cada um deles. E aqui entra um outro dado: a caixa do gato cai, se tirarmos a do hamster. Logo, o gato só pode estar numa das caixas do plano superior e o hamster numa das do plano inferior. Como a única caixa de cima que tem um número par é a 2, então o gato está nesta caixa. Daqui resulta, por exclusão de partes, que o hamster não pode estar nem na caixa 1, nem na caixa 3. Tem de estar na 5. Por outro lado, cada caixa só tem um animal, o que transparece no enunciado da tarefa pelo uso de "ou ... ou", que traduz uma disjunção exclusiva. Assim sendo, se o gato está na caixa 2, então o pato tem de estar na caixa 4. Falta localizar os dois "bichinhos" restantes. Por um raciocínio análogo, o cão só pode estar em 1, pois a caixa onde está cai quando se tira a da tartaruga.

Naturalmente, este não é o único raciocínio possível para justificar onde estão os animais. O que é fundamental é que o professor explore a tarefa com os alunos de modo a trazer para primeiro plano o que permite fundamentar a localização de cada um a partir, nomeadamente, do que se sabe sobre números pares e números ímpares e das consequências que advêm da certeza de que um animal está numa determinada caixa.

Algarismos em sanduíche é uma tarefa que pode ser útil para os alunos contactarem com percursos argumentativos baseados em raciocínios empíricos e, além disso, no *método de redução ao absurdo*.

Algarismos em sanduíche

Tem-se dois algarismos 1, dois algarismos 2 e dois algarismos 3. Dispor em fila estes algarismos de modo a que entre os dois 1 haja um só algarismo, entre os dois 2 haja dois algarismos, e entre os dois 3 haja três algarismos.

Será possível encontrar uma fila de algarismos com estas características se só se tiver dois algarismos 1 e dois algarismos 2?

Na primeira parte da tarefa, a realização de experiências sistemáticas é fundamental para os alunos descobrirem a localização dos algarismos. A manipulação de cartões com os algarismos escritos pode ser favorável à identificação e teste de várias hipóteses. Um modelo do tipo do ilustrado em seguida é um instrumento poderoso para facilitar a descoberta de todas as soluções. Para o construir começa-se por desenhar uma fila de quadrados justapostos, assentes num rectângulo de altura reduzida, como mostra a figura 10.

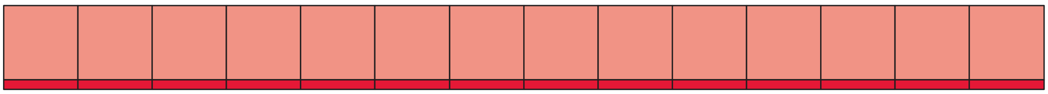


Figura 10

Em seguida, escreve-se o algarismo 1 em dois quadrados separados por um quadrado vazio e corta-se como ilustra a figura 11 A. Pelo mesmo processo e com as adaptações necessárias, constroem-se figuras idênticas para os restantes algarismos (ver figuras 11 B e 11 C).

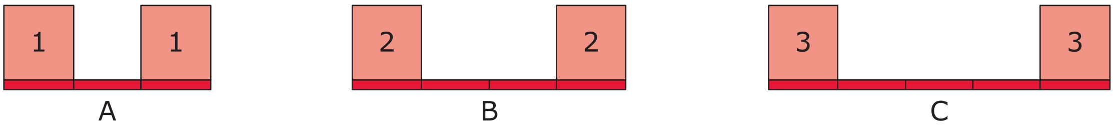


Figura 11

Usando o modelo, as experiências tornam-se mais simples, pois basta fazer deslizar as figuras umas sobre as outras para se perceber quais são as possibilidades de localização dos algarismos. Por exemplo, na primeira parte da tarefa sabe-se que o comprimento total da fila é 6, pois há 6 algarismos. Se se começar por localizar o 1 numa das extremidades, quer a seguir venha o 2, quer venha o 3, o comprimento da fila ultrapassará 6, pois ficam "espaços" vazios. Logo, a disposição dos algarismos não pode começar por 1. Iniciando a fila por 2, a seguir não pode vir um 1, pois, se o localizássemos aí, o segundo 1 iria sobrepor-se ao segundo 2. Deste modo, a seguir ao 2 só pode vir o 3 (figura 12):

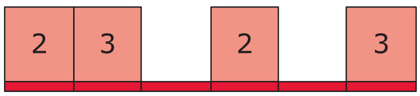


Figura 12

Restam dois "espaços" vazios, separados entre si por um quadrado ocupado por um 2, o que permite que aí se "encaixem" os 1, respeitando as condições do enunciado. Assim, uma possibilidade é: 231213. A outra é a simétrica desta e obtém-se por um raciocínio idêntico: 312132.

Observe-se, agora, a segunda parte da tarefa: *Será possível encontrar uma fila de algarismos com estas características se só se tiver dois algarismos 1 e dois algarismos 2?*

Com o modelo, facilmente se descobre que não, pois se a fila começasse por 1, ao colocar-se os 2, o comprimento total da fila seria 5 (há um espaço vazio), o que não pode acontecer pois o máximo é 4. Se se iniciasse a fila com um dos algarismos 2, as tentativas de localização dos 1 conduziriam ou à sobreposição de algarismos, o que não pode ser pelo enunciado da tarefa, ou a uma fila de comprimento 5.

A impossibilidade de construir uma fila com os algarismos 1 e 2 respeitando as condições do enunciado, poderia ser provada sem o recurso ao modelo usando, por exemplo, o método de *redução ao absurdo*. Começa-se por supor que esta fila existe. Sabe-se que, entre os dois 2, tem de haver dois algarismos. Como os únicos disponíveis são os dois 1, então teriam de localizar-se entre os 2, ou seja, um 1 teria que ficar a seguir ao outro 1. Ora, pelo enunciado da tarefa, os dois 1 têm de ficar separados por um algarismo. Cai-se, assim, numa contradição: por um lado os dois 1 têm que ficar seguidos e, por outro, não o podem ficar. Esta contradição adveio de partirmos da hipótese de que a fila existe. Logo, a fila não pode existir.

O professor pode propor extensões da tarefa *Algarismos em sanduíche*. Por exemplo: *E se acrescentarmos dois 4, de modo a existirem quatro algarismos entre eles? E juntando mais dois 5? E mais dois 6? E mais dois 7? Se designarmos as "sanduíches" referidas no enunciado da tarefa por sanduíche tipo 3, sanduíche tipo 2 e assim sucessivamente, para que valores parece ser possível construir sanduíches? E impossível?*

A tarefa *Regularidades num calendário* permite ilustrar o significado de *justificar uma conjectura por exaustão* e, simultaneamente, recordar a *prova pelo recurso ao exemplo generalizável*, de que se falou a propósito de *Números em Círculos*.

Regularidades num calendário

Observar a folha de calendário representada. Seleccionar uma "cruz" qualquer do tipo da sombreada e adicionar todos os números que estão no seu interior. Investigar a relação entre a soma obtida e o número que está no centro da "cruz" seleccionada.

Dom.	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sáb.
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

É importante que os alunos comecem por analisar exemplos que, de início, podem ser escolhidos ao acaso. No entanto, posteriormente, há que realçar as vantagens de uma escolha sistemática, pois favorece a formulação de conjecturas. Por exemplo, se começarem por adicionar todos os números da cruz assinalada, cujo número do centro é 15 (múltiplo de 5), obtêm a soma 75. Se usarem, em seguida, uma outra cruz em que o número do centro também seja múltiplo de 5 (por exemplo 10), o professor pode desafiá-los a analisarem o que acontece se a cruz tiver no meio um número que não o é, como é o caso de 21, em que se obtém 105.

A observação das somas obtidas pode bastar para intuir que os números têm qualquer coisa em comum: o algarismo das unidades ou é zero ou é 5; nos restantes dígitos parece não haver regularidade alguma. Um dos recursos que pode ser útil à descoberta de relações é a organização dos dados numa tabela que apenas contém os elementos que se pretendem relacionar:

Número do centro da cruz	Soma dos números da cruz
15	75
10	50
20	100
21	105

Se os alunos estiverem familiarizados com contagens de 5 em 5, ou com a tabuada do 5, poderão constatar, a partir da observação da 2.ª e 3.ª linhas, que a soma dos números da cruz é 5 vezes o número do centro. Os exemplos das restantes linhas confirmam esta relação. Assim, parece razoável conjecturar que qualquer que seja a cruz (do tipo da da tarefa), a soma dos números do seu interior obtém-se multiplicando 5 pelo número que está no seu centro.

As conjecturas são sempre "suspeitas" e, se não se conseguir encontrar um contra-exemplo que as refute, devem ser seguidas de outras actividades – procurar porquê e explicar porquê, ou seja, produzir uma *argumentação convincente e matematicamente válida*, que terá de convencer um leitor/ouvinte crítico. Nesta fase, Mason Burton & Stacey (1984) recomendam três estádios:

- *convencer-se a si próprio;*
- *convencer um amigo,* o que leva à necessidade de articular o que parece óbvio de modo a que outros sejam confrontados com razões convincentes sobre porque é que se afirma o que se afirma;
- *convencer um inimigo,* no sentido de convencer alguém que duvida ou questiona as afirmações que se fazem.

É natural que os alunos se convençam que o facto de vários casos analisados verificarem a conjectura, é suficiente para garantir a sua validade para qualquer cruz. Cabe ao professor desempenhar o papel de "inimigo", para os ajudar a compreender que este processo não basta, a menos que analisem todas as cruzes que é possível desenhar no calendário nas condições referidas.

Um possível desafio é pedir-lhes para fazerem o levantamento sistemático de todas as possibilidades e justificarem que as consideraram, de facto, todas. Pode-se enveredar por esta via, pois o universo de casos é finito e o seu número não é elevado (há 12 cruzes). Estaríamos na presença de uma *prova por exaustão* uma vez que se analisaram todas as possibilidades e nenhuma refutou a conjectura. Outra hipótese é o professor incentivar os alunos a explorarem relações numéricas entre os números que estão no interior da cruz focando, simultaneamente, a sua atenção no número do centro, como é ilustrado na figura 13.

Dom.	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sáb.
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Retirar 7 a 22 e adicioná-lo a 8

Retirar 1 a 16 e adicioná-lo a 15

Figura 13

Esta figura evidencia que na cruz “há” 5 quinzes: 22-7; 8+7; 16-1; 14+1; 15. Assim, a adição dos números do seu interior conduz a 5x15. As setas desta figura e expressões numéricas a elas associadas, permitem evidenciar que o raciocínio feito a partir deste exemplo é válido seja qual for a cruz considerada, pelo que se pode considerar a conjectura provada pelo *recurso ao exemplo generalizável.*

A concluir

O estudo PISA 2000 revela que muitos jovens portugueses têm uma capacidade de argumentação significativamente débil (Ramalho, 2002). Em particular, fundamentam os seus raciocínios baseando-se em informações excluídas pelos enunciados de tarefas propostas, apelam a informação não pertinente e irrelevante para justificar as suas respostas e fazem generalizações sem se preocuparem em as testar ou verificar. A atitude que frequentemente se encontra nos alunos – não apenas portugueses e não só do 1.º ciclo do ensino básico – é a de uma certa falta de comprometimento com a coerência, avaliação ou justificação dos seus raciocínios e com a análise crítica e fundamentada do que ouvem dos colegas. É como se considerassem que este papel não lhes compete.

Lidar com esta tendência de modo a alterá-la não é simples, tal como não é simples ensinar os alunos a reconhecer, produzir e avaliar argumentos matematicamente válidos adaptados à sua maturidade. A complexidade deste processo coloca o professor perante desafios que não existirão se a ênfase for, meramente, colocada na aprendizagem de técnicas e procedimentos ou se o controle do discurso da aula e o poder decisório sobre o valor matemático desse discurso estiverem inteiramente nas suas mãos.

Em particular, importa que o professor proporcione aos alunos experiências de aprendizagem em que tenham oportunidade para explicar e justificar o que dizem ou ouvem, para formular conjecturas e para se envolverem na justificação da sua plausibilidade e prova. Fundamental, também, desde os primeiros anos, é que o professor os ajude a incorporar, gradualmente, no seu vocabulário termos que lhes permitam falar sobre todos estes aspectos.

5 INTEGRANDO CONTEÚDOS e PROCESSOS MATEMÁTICOS

A jornada das mil milhas começou com um simples passo.

(Provérbio chinês)

5.1 Introdução

Apresentou-se até aqui um conjunto de ideias que importa ter presentes no trabalho com os alunos associadas à *Resolução de Problemas,* às *Conexões matemáticas,* à *Comunicação matemática* e à *Argumentação em Matemática*. Recorreu-se à sua separação por capítulos por uma questão de organização do texto escrito. Com efeito, na sala de aula as tarefas devem ser exploradas de modo a promover a articulação e integração destes processos matemáticos, embora o grau de profundidade desta exploração dependa da natureza da tarefa e dos objectivos pretendidos.

Este capítulo focar-se-á na integração de conteúdos e processos matemáticos através de duas vias consideradas essenciais e complementares. Na primeira secção, apresentam-se propostas de trabalho organizadas em cadeias de tarefas e sugestões para a sua exploração na sala de aula. A segunda, centra-se em aspectos relativos à construção e manutenção de uma cultura de sala de aula entendidos como favoráveis a que os alunos aprendam a pensar matematicamente, a encontrar sentido nas ideias matemáticas com que lidam e a saber utilizá-las de uma forma correcta, fundamentada e crítica.

5.2 Integração via tarefas matemáticas

As tarefas seleccionadas para exemplificar modos de abordar, de forma integrada, vários processos e conteúdos matemáticos, foram, essencialmente, problemas, o que não significa aderir à ideia de que, na sala de aula, apenas devam ser propostas tarefas deste tipo. A cada uma estão associadas sugestões de possíveis explorações, bem como de modalidades de organização do trabalho com os alunos. As tarefas podem ser trabalhadas em mais do que um ano de escolaridade e o seu enunciado sugere o material a usar que, naturalmente, poderá ser substituído por outro. Cabe ao professor adaptá-las aos seus alunos, bem como às particularidades do contexto em que desenvolve a sua actividade.

No início de cada cadeia de tarefas, aparece, no lado direito, uma caixa em sombreado escuro onde se discriminam tópicos matemáticos por ela abrangidos. Nas sugestões de exploração de cada tarefa, por seu lado, explicita-se, em caixa sombreada a claro, os processos matemáticos mais relevantes que podem ser mobilizados na sua exploração.

5.2.1 Par ou ímpar

Esta proposta de trabalho inclui uma cadeia de cinco tarefas, com incidência principal nos *Números e Operações*. Envolve a utilização de materiais como feijões, papel quadriculado e dados.

- Número par e número ímpar.
- Adição e multiplicação.
- Cálculo mental.
- Operadores numéricos: *dobro de* e *metade de*.
- Noção intuitiva de probabilidade.

1. Brincando com feijões

A Ana e o Rui estão a jogar com feijões. Cada um esconde alguns feijões na mão fechada, estendendo o braço. A Ana começa, tentando adivinhar se o número de feijões do Rui é par ou ímpar. Se acertar, o Rui dá-lhe os seus feijões; se errar, dá ela os seus ao Rui. De seguida, é a vez de o Rui tentar adivinhar. Ganha quem ficar com mais feijões.

Depois a Ana começou a pensar:

– *Se o meu número de feijões é par e o teu é ímpar e eu recolher tudo, fico com um número par ou ímpar?*

E o Rui disse:

– *Há bocado eu tinha um número par de feijões e tu deste-me um número par. Fiquei com par ou ímpar?*

Investiga esta situação. Podes colocar os feijões aos pares e verifica se sobra, ou não, algum sem par.

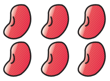
Sugestões de exploração

Desafiar os alunos a investigarem esta situação, começando, cada um, por jogar com o seu par usando feijões. O que se pretende é que interiorizem a representação dos pares e dos ímpares, emparelhando-os como se sugere em seguida:

- Realizar experiências usando objectos.
- Descobrir padrões.
- Formular conjecturas.
- Representar o mesmo conceito de diferentes modos.

Por exemplo:

Para representar o número 6, fazemos:


par

E para representar o 7:


ímpar

Posteriormente, importa que os alunos evoluam para representações mais abstractas:

Representa agora cada número par por □ e cada número ímpar por △
Completa:

□ + □ = ___;   □ + △ = ___;

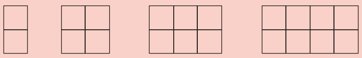
△ + □ = ___;   △ + △ = ___.

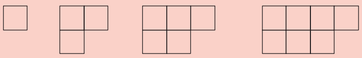
Os alunos devem fazer diversas experiências numéricas, registá-las, procurar regularidades, testar essas regularidades através da exploração de mais exemplos e, finalmente, formular uma conjectura, escrevendo-a em linguagem corrente. As conjecturas serão, possivelmente, do tipo: *a soma de dois números pares é um número par; a soma de dois números ímpares é um número par; a soma de um número par com um número ímpar ou de um ímpar com um par é um número ímpar.*

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 2.º ano de escolaridade.

2. Números quadriculados

Representa, agora, os números em papel quadriculado.

Pares:  …

Ímpares:  …

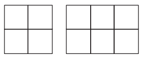
Em seguida, recorta as figuras obtidas e coloca-as lado a lado.
Tenta explicar e justificar as tuas descobertas.

Sugestões de exploração

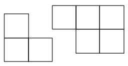
A representação de números em papel quadriculado presta-se à justificação das conjecturas formuladas na tarefa *Brincando com feijões*. Sendo isomorfa à representação com feijões, corresponde, no entanto, a mais um passo na abstracção.

- Representar números pares e ímpares.
- Explicar e justificar raciocínios.
- Provar conjecturas pelo recurso ao exemplo generalizável.

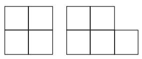
A exploração da tarefa *Números quadriculados* apela ao raciocínio dedutivo e constitui um bom exemplo de que ele é possível no 1.º ciclo do ensino básico. Com efeito, ao colocarem lado a lado duas peças representando números pares, justificam que a soma é par:



Ao colocarem dois números ímpares encaixados, como mostra a figura seguinte, poderão justificar que a soma de dois ímpares é um par:



Finalmente, ao colocarem as representações de um par e um ímpar lado a lado, mostram que a soma de um par com um ímpar – ou de um ímpar com um par – é ímpar.



No processo de exploração da tarefa, é importante levar os alunos a explicitarem aos colegas o seu raciocínio.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 2.º ou 3.º ano de escolaridade.

3. Compras

A Ana e o Rui têm 30 cêntimos para comprar folhas brancas e de cor. Cada folha de cor custa 5 cêntimos e cada folha branca custa 4 cêntimos. Quantas folhas de cada tipo podem comprar, se quiserem gastar o dinheiro todo?

Explica as conclusões a que chegaste.

Sugestões de exploração

Procura-se que os alunos generalizem o problema para um número par e para um número ímpar de parcelas. Em particular, pretende-se que concluam, possivelmente depois de várias tentativas, que, como o preço das folhas brancas é sempre par, os amigos, para perfazerem 30 cêntimos, nunca poderão comprar um número ímpar de folhas de cor. Em seguida, surge a necessidade de analisar as restantes hipóteses, o que pode ser feito através da construção da seguinte tabela:

- Fazer tentativas.
- Construir uma tabela para representar e organizar informação.
- Estabelecer conexões entre a Matemática e a vida real.
- Provar por exaustão.

n.º folhas de cor	preço	n.º folhas brancas	preço	Total
0	0	–	–	impossível
2	10	5	20	30
4	20	–	–	impossível
6	30	0	0	30

Na fase do preenchimento da tabela, confrontam-se com os valores 30 e 10 para a compra de folhas brancas, que não são divisíveis por 4, o que leva à conclusão de que a primeira e a terceira hipóteses são impossíveis.

Estas conclusões, por parte dos alunos, dependem de o professor conduzir um diálogo cuidadoso que garanta, por um lado, que todas as situações foram analisadas e, por outro, quais as razões de impossibilidade de algumas delas.

A conclusão final é que há, apenas, duas soluções para o problema: ou compram duas folhas de cor e cinco brancas ou compram apenas seis folhas de cor. A tabela apresentada permite analisar todos os casos.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 3.º ano de escolaridade.

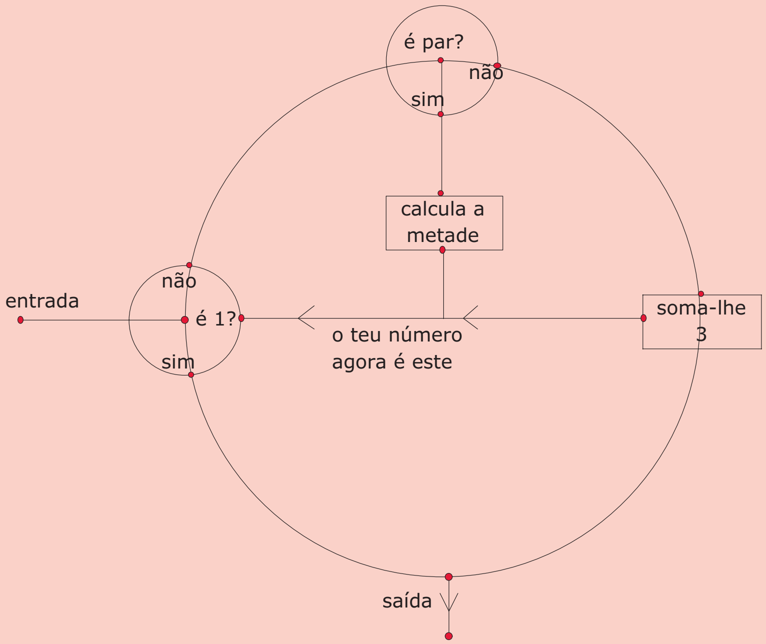
4. Gincana

Escolhe um número.

Entra no circuito seguinte com esse número e vai seguindo as instruções com que deparares.

Conseguiste sair do circuito? Se sim, ao fim de quantas passagens no primeiro posto? Se não, quais os números que não saem?

Repete a experiência com outros números.



Sugestões de exploração

Este jogo pode ser feito no papel ou, em alternativa, marcar-se o circuito no terreno para que as crianças o percorram com um número identificador. Sugere-se que inicialmente se escolham números entre 1 e 10.

- Realizar experiências
- Identificar padrões.
- Enunciar e testar conjecturas.
- Formular problemas.

De uma forma lúdica, o aluno vai sendo conduzido pelas instruções ao reconhecimento de números pares e ímpares e ao cálculo mental, desenvolvendo, assim, o sentido do número. O facto de ter de executar um conjunto sequencial de instruções em alternativa, tendo de tomar decisões, permite disciplinar e organizar o pensamento. Ilustra-se, em seguida, tentativas para os primeiros números:

1	sai
2→1	sai ao fim de uma volta
3→6→3→6→3→	não sai
4→2→1	sai ao fim de duas voltas
5→8→4→2→1	sai ao fim de quatro voltas
6→3→6→3→6→	não sai
7→10→5→8→4→2→1	sai ao fim de seis voltas
8→4→2→1	sai ao fim de três voltas
9→12→6→3→6→3→	não sai
10→5→8→4→2→1	sai ao fim de cinco voltas

Sugere-se que o professor incentive os alunos a realizarem um registo semelhante.

Com a continuação das experiências, os alunos podem descobrir que os números que não saem são 3, 6, 9, 12, … identificando-os como múltiplos de 3. Poderão ainda, descobrir que saem sempre os números cuja metade, a metade da metade e assim sucessivamente é, em qualquer dos casos, um número par até chegar ao 1; isto é, saem sempre as potências de 2.

As regras estabelecidas para a continuação do percurso podem ser alteradas. Além disso, pode incentivar-se os alunos a inventarem novas regras que permitam outro tipo de cálculos mentais e outras abordagens.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, aos 3.º e 4.º anos de escolaridade.

5. O jogo do produto

A Ana e o Rui brincavam com dois dados cujas faces estão numeradas de 1 a 6.

A certa altura, a Ana disse ao Rui:

– Vamos fazer um jogo. Lançamos os dados; se o produto der par, eu ganho um ponto; se der ímpar ganhas tu.

O Rui respondeu-lhe, indeciso:

– Não sei se esse jogo me convém…

Vamos jogar para ajudar o Rui a decidir.

Sugestões de exploração

Esta tarefa permite estabelecer conexões entre o campo numérico, explorando a paridade do produto de dois números, e o tema *Probabilidades*.

- Representar dados numa tabela de dupla entrada.
- Formular e testar conjecturas.
- Provar as conjecturas por exaustão.
- Formular problemas.
- Estabelecer conexões dentro da própria Matemática.

Os alunos começam por jogar em grupos. Depois, registam a paridade (P – par ou I – ímpar) do produto obtido ao multiplicar os dois números resultantes do lançamento dos dados. O registo e a organização destes resultados podem ser facilitados pela construção de uma tabela de dupla entrada, onde se registam todos os casos possíveis.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	I	P	I	P	I	P
2	P	P	P	P	P	P
3	I	P	I	P	I	P
4	P	P	P	P	P	P
5	I	P	I	P	I	P
6	P	P	P	P	P	P

Importa que o professor incentive os alunos a analisar a tabela, de modo a que cheguem a conclusões sobre se o jogo é, ou não, justo. Através desta análise, constatarão que há muitos mais resultados pares; na verdade, um produto só é ímpar quando ambos os factores são ímpares, o que acontece em apenas 9 casos, contra 27 resultados pares num total de 36. Assim, o jogo não convinha mesmo ao Rui!...

O professor pode discutir com os alunos, em face deste resultado, o conceito de jogo justo, como sendo um jogo em que ambos os jogadores têm, à partida, as mesmas possibilidades de ganhar. Neste jogo tal não acontece pois, como vimos, o jogador par tem o triplo das hipóteses do jogador ímpar, isto é, a probabilidade de o jogador par ganhar o jogo é tripla da do jogador ímpar.

Uma extensão do jogo do produto que se pode propor é a seguinte: *Como transformar o jogo do produto num jogo justo, se houver liberdade para alterar os números que estão nas faces dos dados (ou o número de pintas dos dados) como se quiser?*

Uma possibilidade é manter-se um dos dados e modificar o outro de modo a que os números de todas as faces sejam ímpares.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 4.º ano de escolaridade.

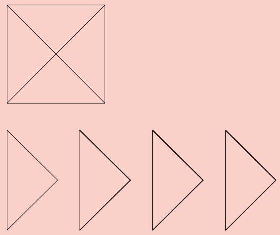
5.2.2 Triângulos e outras figuras

Esta proposta de trabalho inclui, tal como a anterior, uma cadeia de tarefas, neste caso relacionadas com os temas *Geometria e Medida*. Proporciona o desenvolvimento da visualização espacial no reconhecimento de figuras geometricamente iguais. Recorre a materiais como papel, tesoura e geoplano.

- Polígonos: reconhecimento e classificação.
- Figuras geometricamente iguais (congruência).
- Utilização intuitiva de isometrias: rotação e simetria.
- Perímetro e área: conceitos e medida.
- Propriedades de figuras geométricas.

1. *Imaginando figuras com triângulos*

Traça as diagonais do quadrado e recorta os quatro triângulos obtidos.



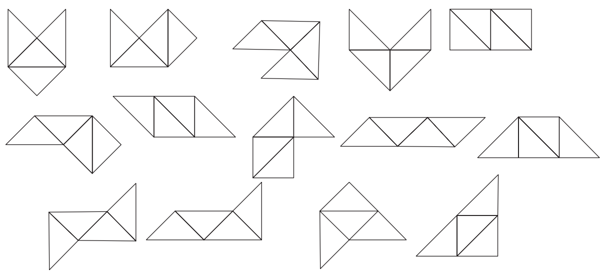
Colocando os quatro triângulos lado a lado de modo a que os lados coincidam dois a dois, constrói todas as figuras possíveis.

Sugestões de exploração

Esta tarefa requer a manipulação de figuras geométricas e o uso da estratégia *Fazer tentativas*. Os alunos devem começar pelo reconhecimento da igualdade geométrica entre os quatro triângulos. É importante que compreendam o processo de construção de novas figuras: os triângulos não podem sobrepor-se e quando se justapõem os dois lados devem coincidir.

- Fazer tentativas usando objectos.
- Estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas curriculares (expressão plástica e língua portuguesa).
- Usar representações activa e icónica.
- Comunicar e justificar as descobertas efectuadas.

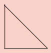
A tarefa *Imaginando figuras com triângulos* pode ser útil para trabalhar o reconhecimento de diversos polígonos e algumas das suas propriedades. Permite a transição do nível de mera percepção visual para o reconhecimento das propriedades das figuras. Além disso, os alunos lidam com a igualdade geométrica para decidir se uma nova figura é realmente diferente das anteriores, o que proporciona a compreensão desta noção. Vão, assim, interiorizando a ideia de que as acções de virar ou rodar figuras não alteram a sua forma nem medidas. Exceptuando o quadrado donde se partiu, apresentam-se, em seguida, as catorze figuras diferentes que é possível construir.

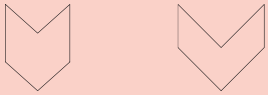


O professor pode, ainda, sugerir aos alunos que imaginem designações criativas para algumas das figuras construídas e que inventem e dramatizem uma história com estas "personagens".

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 3.º ou 4.º anos de escolaridade.

2. Perímetros e áreas

a) Usando os triângulos  (triângulos rectângulos isósceles) constrói, no geoplano, as seguintes figuras. Chama-lhes gato e raposa.



Contorna-as com um fio, primeiro o gato e depois a raposa.

Para qual delas precisaste de mais fio? Qual tem maior perímetro? Tenta justificar a tua conclusão sem te servires do fio.

b) Tomando como unidade de medida o triângulo que serviu para construir as figuras, mede a área do gato e a da raposa. O que podes concluir?

Sugestões de exploração

- Argumentar usando raciocínio lógico.
- Justificar raciocínios.
- Estabelecer conexões entre Geometria e Medida.

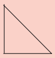
Esta tarefa é útil para a exploração e confronto dos conceitos de perímetro e área e facilita a interiorização da ideia de que medir é comparar. As figuras desenhadas no geoplano podem ser outras quaisquer. De notar que, dada a diferente disposição dos triângulos base nas duas figuras e para manter a sua equivalência o gato tem de ficar "inclinado" em relação aos lados do geoplano.

Na primeira parte, os alunos, ao medirem com um fio o contorno das figuras, vão constatar, apenas por comparação, mesmo sem usarem unidades de medida de comprimento estandardizadas, que contornar a raposa exige mais fio. Logo esta figura tem maior perímetro do que a que o gato (talvez seja conveniente fazerem uma marca no fio no fim da primeira medição). Pretende-se, depois, que os alunos, caminhando para uma abstracção progressiva, justifiquem esta descoberta sem usar o fio. Poderão argumentar que o gato é contornado por quatro segmentos "pequenos" e dois "grandes", ao passo que a raposa é contornada por dois segmentos "pequenos" e quatro "grandes". Assim, a raposa tem maior perímetro. A segunda parte visa a reconstituição mental, pelos alunos, do processo de construção das figuras, para concluírem que ambas são formadas pelos mesmos quatro triângulos e, por isso, têm a mesma área.

Para que não haja confusão entre os conceitos de perímetro e de área, pode ser importante que o professor deixe passar algum tempo entre a exploração das duas partes da tarefa.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 3.º ou 4.º anos de escolaridade.

3. História geométrica

No quadro está um triângulo rectângulo isósceles 

Desenha uma nova figura que tenha uma propriedade em comum com o triângulo. Que propriedade usaste?

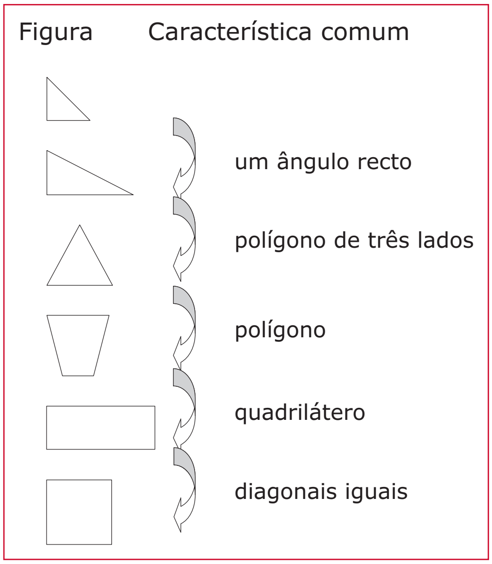
Desenha agora uma outra figura com uma propriedade em comum com a que desenhaste. Que propriedade usaste desta vez?

...

Sugestões de exploração

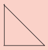
A tarefa *História Geométrica* pode ser explorada com toda a turma, começando o professor por colar no quadro um triângulo. Em seguida pode convidar os alunos a dirigirem-se sequencialmente ao quadro para desenharem novas figuras respeitando as condições da tarefa. À medida que se desenvolve a actividade, os alunos vão avançando no reconhecimento de propriedades das figuras geométricas e na descoberta de características comuns em figuras diferentes. No final, ficará desenhada uma sequência de figuras que constitui uma história, pois há um elo de ligação entre cada uma e a seguinte. Por exemplo:

- Comunicar oralmente os raciocínios feitos usando diferentes representações.
- Explicar e justificar raciocínios.
- Estabelecer conexões entre diversos tópicos de Geometria.



Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 3.º ou 4.º anos de escolaridade.

4. Ao telemóvel

Constrói uma figura com alguns triângulos  (triângulos rectângulos isósceles).

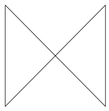
Imagina que estás ao telemóvel com um amigo e queres que ele desenhe a figura que construíste na posição em que a tens. Pensa na sequência de instruções e transmite-a.

Sugestões de exploração

Inicialmente, o professor deve exemplificar com toda a turma o que se pretende com a tarefa, construindo, por exemplo, uma figura e dando indicações sobre possíveis sequências de instruções para a reproduzir. Através desta acção, contribui para que os alunos compreendam o tipo de trabalho que vão realizar.

- Comunicar oralmente com recurso a vocabulário especifico da Matemática.
- Elaborar uma sequência organizada de instruções.
- Executar uma sequência organizada de instruções.

Suponha-se que a figura desenhada no quadro é a seguinte:



Para desenhar este "laço", uma sequência de instruções pode ser:

- Desenha um quadrado com dois lados na horizontal;
- Traça as suas diagonais;
- Apaga os lados horizontais do quadrado.

Ou então:

- Traça um segmento de recta horizontal chamando A e B aos seus extremos;
- Traça o segmento de recta perpendicular ao anterior, do mesmo comprimento e de modo que se cruzem a meio, chamando C e D aos seus extremos;
- Une A com C e B com D;
- Desenha a mesma figura, mas rodada de modo a que os segmentos AC e BD fiquem na vertical.

Posteriormente, a tarefa pode ser realizada por pares de alunos, havendo um separador entre eles, de modo a esconder, a cada um, o trabalho do outro. Um dos elementos do par começa por construir a figura com os triângulos (podemos começar por nos limitar a dois triângulos e, só depois, passar para três e para quatro) e dá, de seguida, as instruções correspondentes. O colega vai desenhando uma figura no seu caderno, de acordo com estas instruções. Findo o processo, comparam os dois trabalhos e, no caso de não estarem iguais, procuram descobrir o que falhou: se as instruções enunciadas se a interpretação das instruções ouvidas e/ou o seu cumprimento. Em seguida, os alunos trocam de posições.

Provavelmente, vão ocorrer muitas situações dúbias e polémicas, já que se trata de uma tarefa complexa. Assim, sugere-se que depois de os alunos jogarem duas ou três vezes, o professor aproveite um ou dois casos trabalhados e discuta com toda a turma a correcção da sequência de instruções procurando, em conjunto com os alunos, o seu progressivo refinamento.

O trabalho realizado com as tarefas relativas a esta cadeia pode ser divulgado a outras turmas da escola através, por exemplo, da elaboração de cartazes.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 4.º ano de escolaridade.

5.2.3 Números e Capicuas

Números e Capicuas é uma cadeia de três tarefas cuja incidência principal é *Números e Operações*, onde sobressai a importância da realização de várias experiências pelos alunos, bem como a familiarização com as regularidades que vão sendo detectadas. Estes aspectos são favoráveis ao desenvolvimento do sentido do número e de capacidades de cálculo. A sua exploração requer lápis de cor, calculadora e uma tabela com os números de 10 a 99.

- Números inteiros.
- Valor posicional.
- Adição.
- Padrões numéricos.
- Recolha e organização de dados: tabelas e gráficos de barras.

1. Palíndromos e Capicuas

a) O que é que os números, as palavras e as frases seguintes têm em comum?
- 33 101 777 585 41 000 014
- Ana aia radar reler
- Luz azul
- Madam, I'm Adam
- Seco de raiva coloco no colo caviar e doces

b) Descobre uma palavra que seja palíndromo.

c) Constrói uma frase capicua.

Sugestões de exploração

Esta tarefa pode constituir um bom ponto de partida para que os alunos compreendam o significado de capicua e sua origem. Para ir mais além, o professor poderá propor um trabalho de pesquisa sobre palíndromos e capicuas, recorrendo a fontes diversificadas, o que pode dar origem a um trabalho escrito elaborado em grupo.

- Descobrir padrões.
- Estabelecer conexões entre a Matemática e a Língua Portuguesa.

Resumem-se algumas das ideias que poderão surgir nessa pesquisa.

De acordo com os filólogos catalães, a palavra capicua nasceu em Barcelona, no final do século XIX, para designar os números que podem ser lidos indiferentemente da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, como, por exemplo, 121, 3113 ou 25152. Por esta razão, usa-se o vocábulo capicua, composto de cap+i+cua que, em Catalão, significa, literalmente, "cabeça e cauda". Este tipo de números já era estudado na Grécia Antiga, onde lhes chamavam números palíndromos, à semelhança dos palíndromos na linguagem: vocábulos ou frases que podem ser lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, como, por exemplo, Ana ou luz azul. Palíndromo reúne palin+dromo (em Grego, "de novo, em sentido inverso" e "correr"). Em suma, capicuas ou palíndromos podem ser números, expressões, palavras ou frases.

A tarefa proporciona um contexto favorável ao estabelecimento de conexões entre a Matemática e a Língua Portuguesa e apela à imaginação dos alunos, dando-lhes a oportunidade de apresentarem propostas criativas. Além disso, é propícia à descoberta de regularidades, o que lhes facilitará, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, ao 2.º ou 3.º anos de escolaridade.

2. O truque do Tó

O Tó quis fazer um truque numérico ao Zé:

Tó: Pensa num número de dois algarismos.
Zé: Já pensei.
Tó: Troca os algarismos para obter um outro número. Já está? Agora adiciona os dois e diz-me quanto te deu.
Zé: Deu-me 132.
Tó: E eu já sei qual foi o número em que pensaste!

Saberá o Tó em que número pensou o Zé? Procura descobrir.

Sugestões de exploração

O enunciado do problema é um pouco misterioso, como convém a um truque de magia. Como tal, é necessário que os alunos o explorem através do recurso a vários exemplos para aprofundarem a compreensão da questão central.

- Fazer tentativas e descobrir padrões.
- Formular conjecturas.
- Justificar raciocínios.
- Argumentar posições.
- Provar por exaustão.

O "clique" fundamental dá-se quando os alunos conjecturam que para obter 2 como algarismo das unidades, é necessário que a soma dos números correspondentes aos algarismos das unidades das parcelas seja 2 ou 12. A partir daí, a tentativa torna-se mais organizada e dirigida a um fim conhecido.

É natural que um aluno, ao encontrar a primeira solução, fique convencido de que resolveu a questão e considere que o Tó, de facto, sabia o número em que o Zé tinha pensado. Nesta fase, é necessário que o professor o encoraje a persistir e a analisar se a solução é, realmente, única.

Analisemos as decomposições do 2 e suas consequências:

- 2=0+2 –> o primeiro número seria 20 e o segundo 02, mas a sua soma não é 132;
- 2=1+1 –> o primeiro número seria 11 e o segundo 11, mas a sua soma não é 132;
- 2=2+0 –> o primeiro número seria 02 , que não é um número de dois algarismos.

Como as decomposições do 2 não conduzem a nenhuma solução, analisemos as decomposições do 12 em parcelas com um algarismo.

- 12=3+9 –> o primeiro número seria 93 e o segundo 39:

$$\begin{array}{r} 93 \\ +39 \\ \hline 132 \end{array}$$

Obtivemos a solução 93 e, por simetria, também 39.

- 12=4+8 –> o primeiro número seria 84 e o segundo 48.

$$\begin{array}{r} 84 \\ +48 \\ \hline 132 \end{array}$$

Desta vez, obtivemos a solução 84 e, por simetria, também 48.

- 12=5+7 –> o primeiro número seria 75 e o segundo 57.

$$\begin{array}{r} 75 \\ +57 \\ \hline 132 \end{array}$$

Aparecem aqui as soluções 75 e 57.

- Finalmente, 12=6+6 –> ambos os números seriam 66

$$\begin{array}{r} 66 \\ +66 \\ \hline 132 \end{array}$$

E 66 é também solução.

No final, constata-se que há sete soluções possíveis, donde se conclui que o Tó não podia saber o número em que pensou o Zé: há sete números de dois algarismos cuja soma é 132.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, a alunos a partir do 2.º ano de escolaridade.

3. A caminho das capicuas

Podemos obter números capicuas partindo de um número e efectuando alguns passos.

Exemplo 1

$$\begin{array}{r} 29 \\ +92 \\ \hline 121 \end{array}$$

capicua – 1 passo

Exemplo 2

$$\begin{array}{r} 67 \\ +76 \\ \hline 143 \\ +341 \\ \hline 484 \end{array}$$

capicua – 2 passos

Os passos indicam o número de operações necessárias para chegar a uma capicua.

Faz algumas experiências, procurando classificar os números em capicuas de 1, 2, 3, … passos.

Regista as tuas descobertas.

Sugestões de exploração

A tarefa poderá ser explorada pelos alunos organizados em grupo. Cada grupo analisará um determinado conjunto de números (por exemplo, 10 a 19; 20 a 29; 30 a 39; ...; 90 a 99) e identificará os passos necessários para chegar a uma capicua. Os dados devem ser registados numa tabela:

- Fazer uma tabela.
- Descobrir padrões.
- Explicar e justificar raciocínios e regularidades.
- Utilizar e relacionar diferentes tipos de representações de dados.

0 passos	1 passo	2 passos	3 passos	4 passos	5 passos	6 passos	Mais de 6 passos
11							
22							
33							
44							
…							

A calculadora pode ser útil para fazer as experiências a partir do terceiro passo, podendo usar-se, eventualmente, o computador e uma folha de cálculo.

Para uma melhor visualização das descobertas, pode distribuir-se, por cada grupo, um quadro como o da figura 1 em que os alunos pintarão cada número usando cores diferentes de acordo com o número de passos necessários para obter uma capicua (figura 2).

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 1

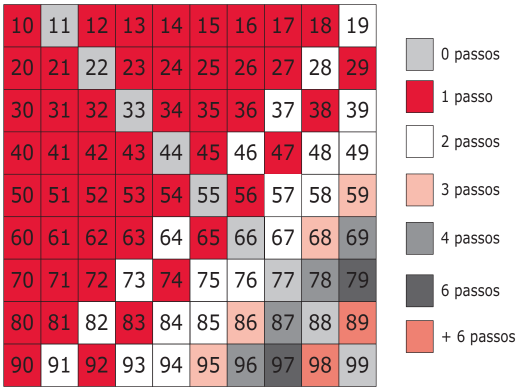


Figura 2

Como se pode constatar a partir da observação da figura 2, há só dois números – o 89 e o 98 – que requerem mais de seis passos para chegar a uma capicua. Em qualquer destes casos, são necessários 24 passos.

É importante incentivar os alunos a analisarem a figura colorida de modo a descobrirem relações interessantes que devem procurar explicar. Além disso, a exploração da tarefa proporciona uma boa ocasião para organizarem dados recolhidos numa tabela e também apresentá-los sob a forma de um gráfico de barras.

Lista-se, em seguida, algumas das relações que podem surgir ao longo do trabalho:

- O que se passa, por exemplo, com o número 36 passa-se com o 63 e, genericamente, com dois números quaisquer com a ordem dos algarismos invertida. Daqui resulta a simetria da tabela e, portanto, a necessidade de fazer apenas metade das experiências.
- Funcionam da mesma maneira os casos em que a soma dos números correspondentes aos algarismos é a mesma. Por exemplo, as conclusões para o número 56 (65) são as mesmas que para o número 47 (74).
- Sempre que a soma em cada ordem provoque transporte, o número de passos para atingir uma capicua vai aumentando com o valor numérico dos números correspondentes aos algarismos desse número.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, a alunos a partir do 3.º ano de escolaridade.

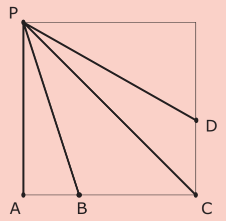
5.2.4 Percursos no relvado

Esta proposta de trabalho tem incidência principal na *Geometria* e *Medida*. Recorre aos seguintes materiais: corda para traçado no terreno, papel em que estão desenhados quadrados e instrumentos de medição.

- Medição de comprimento, área e tempo.
- Divisão.
- Propriedades de figuras geométricas.
- Itinerários.
- Estimativas.
- Raciocínio proporcional.

1. Marcando percursos no relvado da escola

O relvado da escola do Pedro tem a forma de um quadrado. Hoje vai haver provas de atletismo e o Pedro tem de marcar quatro percursos no relvado para uma corrida disputada por quatro colegas que devem partir do mesmo ponto e dirigir-se a pontos distintos A, B, C e D.



O Pedro marcou no chão, com a ajuda de cordas, os seguintes percursos partindo de P:

Pensas que esta corrida vai ser justa? Porquê?
Sugere alternativas.

Sugestões de exploração

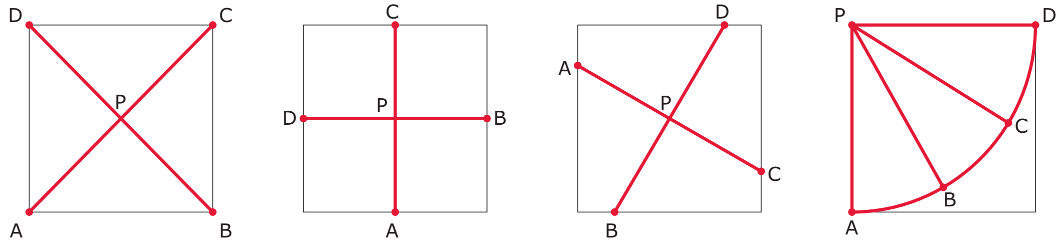
Esta tarefa pode ser realizada no relvado (ou pátio) da escola recorrendo à marcação de um quadrado e dos percursos indicados, com a ajuda de cordas. Os alunos, depois da dramatização da situação, reconhecem facilmente que a corrida não é justa, já que os percursos não têm o mesmo comprimento, o que pode ser verificado por medição. No entanto, a conclusão de que o aluno que chega primeiro é o que tem o percurso menor pode não corresponder à realidade. Este aspecto deve ser discutido com a turma.

- Fazer uma simulação/dramatização.
- Explicar e justificar raciocínios.
- Estabelecer conexões entre a Matemática e a Expressão Físico-Motora.
- Usar representações activa e icónica.

Em seguida, os alunos devem trabalhar na sala de aula, com papel e lápis, de modo a procurarem justificações para a comparação entre os comprimentos dos vários percursos, descobrindo propriedades de figuras geométricas (por exemplo, a diagonal do quadrado é maior do que o seu lado).

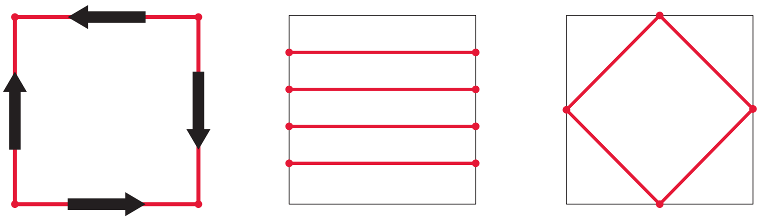
Numa segunda fase, poderão trabalhar em pares com o objectivo de apresentarem e justificarem percursos alternativos aos indicados de modo a que a corrida seja justa.

Apresentam-se algumas possibilidades de solução:

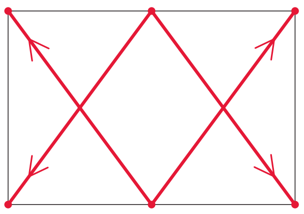


O professor pode incentivar os alunos a imaginarem outras formulações da tarefa modificando algumas condições no problema inicial. Por exemplo:

- O ponto de partida não é o mesmo. Esta situação conduz a esquemas do tipo a seguir apresentado, para os quais os alunos podem propor diferentes formulações e/ou resoluções.



- A figura inicial não é um quadrado. Pode ser, por exemplo, um rectângulo não quadrado:



Esta tarefa destina-se a alunos a partir dos 3.º e 4.º anos de escolaridade.

2. Quantos pés de relva?

Descobre um processo de calcular um valor aproximado do número de pés de relva existentes no relvado da tua escola ou de um jardim próximo.

Sugestões de exploração

Esta é uma tarefa aberta que permite que os alunos procurem estratégias próprias e criativas, para obter uma resposta. Será adequado trabalharem em pares ou em pequenos grupos. Sugere-se que o professor inicie a tarefa questionando os alunos sobre o número de pés que lhes parece existirem no relvado, estabelecendo uma pequena discussão sobre a plausibilidade dos números avançados.

- Reduzir a um problema mais simples.
- Usar argumentos matemáticos para chegar a consensos.
- Estabelecer conexões entre Geometria e Medida.

Na sequência, surgirá a questão de saber se é, na realidade, possível contar todos os pés existentes. Provavelmente os alunos chegarão à conclusão de que, na prática, não o é. A partir daí, o professor deve conduzi-los para a necessidade de fazerem uma boa estimativa. E aqui é que intervém a criatividade nas propostas dos alunos.

Poderão surgir estratégias, exequíveis ou não, relacionadas com pesagens ou cálculo de áreas, que deverão ser discutidas em grande grupo, de modo a identificar a melhor estratégia para que esta seja utilizada por todos. Em alternativa, cada pequeno grupo trabalha separadamente. A apresentação de estratégias e a discussão conjunta realiza-se, apenas, no final.

A melhor estratégia será considerarem um pequenino talhão cuja área sabem calcular (por exemplo, um quadrado de 20 cm de lado), contando os pés de relva existentes nesse quadrado. De seguida, devem calcular a área do quadrado e a área total do relvado, de modo a averiguar quantas vezes o pequeno quadrado aí cabe. Através do raciocínio proporcional obtém-se um valor aproximado do número de pés de relva existentes ao todo.

Esta tarefa destina-se, preferencialmente, a alunos do 4.º ano de escolaridade.

5.3 Aspectos de uma cultura de integração

A criação de uma cultura de sala de aula é um elemento fundamental de qualquer prática de ensino. A sua construção e manutenção requerem o estabelecimento de um conjunto de normas de acção e interacção no interior das quais o professor pode ensinar e os alunos podem aprender. Todos os professores, mais ou menos deliberadamente, realizam este trabalho. Fazem-no é de modos muito variados e partindo de pressupostos diversos quanto às tarefas a propor, às actividades a valorizar, às interacções a privilegiar e aos papéis dos vários elementos da turma. Esta diversidade conduz a múltiplas variações na cultura de sala de aula.

A integração de conteúdos matemáticos e processos matemáticos, no sentido anteriormente referido, depende da existência de uma cultura de sala de aula com determinadas características. É indispensável, por exemplo, que os alunos se envolvam na apresentação, explicação e defesa das suas ideias, que reajam e comentem intervenções dos colegas, que analisem criticamente o que ouvem e que, se não merecer o seu acordo, o exprimam fundamentando o porquê da divergência.

Constituir e manter culturas deste tipo não é tarefa simples. Passa, não apenas por fazer emergir ideias dos alunos, mas também por o professor saber o que fazer com estas ideias de modo a que a turma trabalhe colectivamente no sentido de chegar a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado de ideias matemáticas importantes. Passa, também, por ensinar "outros conteúdos" que vão para além do que usualmente se designa por conteúdos matemáticos (Lampert, 2001). Por exemplo, é fundamental que o professor ensine a importância da escuta atenta, da expressão audível, da participação organizada e do respeito mútuo. Além disso, é essencial que os alunos aprendam que são responsáveis por explicarem e fundamentarem o que dizem e por tentarem encontrar sentido nas ideias apresentadas.

Caminhar nesta direcção depende, não apenas, daquilo que o professor diz, mas, sobretudo, do que faz. Relaciona-se, nomeadamente, com a negociação de um certo conjunto de normas de acção e de interacção que ajudem os alunos a compreender qual o papel que deles se espera e como devem falar acerca de Matemática na sala de aula: quem fala, para quem e de que modos. De modo a concretizar esta ideia, retome-se um extracto do episódio *Fomos comprar fiambre* apresentado no capítulo 3.

> ***Fomos comprar fiambre***
>
> Daniel: Eu fiz 0,93 vezes 4.
>
> Patrícia *(olhando para a professora)*: 0,93? Onde está 0,93?
>
> Professora: Pergunta-lhe.
>
> Patrícia: Onde foste buscar esse 0,93?

O que está em jogo neste diálogo é a negociação contextualizada de uma norma que é fundamental para o estabelecimento de uma cultura com as características referidas: *os pedidos de explicação de raciocínios devem ser endereçados aos seus autores e estes devem assumir a responsabilidade de os apresentar*. Repare-se que, na sequência da intervenção de Daniel, Patrícia endereça à professora um pedido de explicação sobre o raciocínio do colega, o que traduz uma transgressão a esta norma. A professora poderia ter-lha apresentado ou tê-la pedido ao Daniel. No entanto, não o faz. Através da sua intervenção "pergunta-lhe" mostra, claramente, que a norma não foi respeitada e, por esta via, ensina à turma que se um aluno apresenta uma ideia é a ele que devem ser dirigidos os pedidos de explicação. Simultaneamente, mostra que este deve responsabilizar-se por a tornar inteligível para outros.

Também o episódio *É o número central e um quatro ao lado* (adaptado de Boavida, 2005), associado à exploração da tarefa *Números em Círculos* apresentada no capítulo 4, mostra de que modo a professora usa os acontecimentos da aula para promover uma negociação contextualizada da norma anteriormente referida. Repare-se, por exemplo, na sua resposta à pergunta de Catarina.

É o número central e um quatro ao lado

Professora: Vamos agora todos discutir. Vão dar uma voltinha para não ficarem de costas para o quadro. Ricardo, vira-te ao contrário, faz favor! Vou começar por perguntar ao grupo do André. Qual foi a vossa primeira conjectura? André, a primeira de todas.

André *(olha para o caderno)* A primeira, primeira? Foi o número central e um quatro ao lado.

Professora: O grande total é igual ao número central e um quatro ao lado. É isto?

André: Sim, o quatro está do lado direito. Dá sempre quatro mais o número central. Então, se o número central for 50, dá 504. Dá o número mesmo e o quatro.

Catarina: Professora, quer dizer que é o número central mais quatro?

Professora: Eu não sei... O André é que disse...

André: Não! É o número central e um quatro ao lado, não é mais um quatro, estás a perceber? É o número central com um quatro à frente.

Professora: Tomás, têm a mesma conjectura?

Tomás: Não consegui ouvir.

Professora: Por acaso, desta vez, ele até falou mais ou menos alto. Vocês têm que ouvir...

Tomás: Estava concentrado nisto *(aponta para o caderno)*. Professora, venha cá ver.

Professora: Pois, mas estamos a tentar fazer uma discussão, portanto, quando alguém está a falar é para ouvir! E se queres dizer alguma coisa, diz para todos.

Tomás: Aqui também vimos que é nove vezes dez e depois mais quatro.

Professora: E que número é esse, o nove?

Mariana *(em voz baixa)*: É o que está no meio.

Professora: Diz mais alto, Mariana para toda a gente ouvir.

Mariana: O nove é o número do centro.

Professora: O nove é o número do centro. Então, qual é a vossa conjectura?

Tomás: É o número do centro vezes dez mais quatro...

Professora: Já temos aqui duas conjecturas. O André disse que a primeira do grupo dele foi o grande total é igual ao número central seguido de quatro. O Tomás disse que o grande total é igual ao número do centro vezes dez mais quatro... Antes de continuarmos, vamos pensar nestas duas. Comentários...

Teresa: A nossa conjectura é parecida com a do André. Não estou a perceber é porque é que eles *(aponta para o grupo do Tomás)* foram fazer vezes dez mais quatro...

Professora: A Teresa está a dizer que não percebe porque é que para obter o grande total se pode multiplicar o número do centro por dez e adicionar quatro. Tomás e colegas, tentem lá explicar, vá.

Este episódio permite, além disso, ilustrar os processos usados pela professora para negociar as normas *todos devem escutar atentamente o que é dito, todos devem exprimir-se de forma audível pela globalidade da turma* e *numa discussão é importante a partilha de ideias*. Note-se, por exemplo, a forma como reage às duas primeiras intervenções de Tomás. Em primeiro lugar, através da referência ao facto do colega ter falado num tom de voz passível de ser ouvido, valoriza a expressão audível. Esta mesma valorização sobressai no pedido que faz à Mariana quando esta aluna fala em voz baixa. Em segundo lugar, destaca a importância da escuta ao sublinhar que, em momentos de discussão, o que importa é ouvir, pelo que não é adequado centrar a atenção em aspectos da aula que o impeçam. Em terceiro lugar, não se deslocando ao lugar do aluno e apontando-lhe a alternativa de explicitar o que fez, coloca a ênfase em que são todos os elementos da turma, e não apenas o professor, que devem ter acesso a raciocínios feitos no interior de um grupo. Com efeito, durante as fases de discussão colectiva, a aproximação aos lugares dos alunos, seja para escutar ideias expressas num tom de voz baixo, seja para observar resultados a que chegam, pode transmitir, implicitamente, a mensagem de que não é importante partilhar ideias com os colegas ou falar de modo a que todos ouçam. Deslocando-se aos lugares dos alunos nestas fases, o professor transgride as normas que valorizam a partilha, podendo boicotar, não intencionalmente, a sua apropriação, a menos que seja claro, para os alunos, o que justifica a transgressão.

Observando, globalmente, o episódio, há várias intervenções da professora reveladoras de que procura descentrar a actividade da aula de si própria e mostrar aos alunos que também são responsáveis pela aprendizagem dos colegas. Por exemplo: *Eu não sei... O André é que disse...; Antes de continuarmos, vamos pensar nestas duas. Comentários...; A Teresa está a dizer que não percebe (...) Tomás e colegas, tentem lá explicar, vá*. Além disso, constata-se que, por vezes, lida com as contribuições dos alunos introduzindo-lhes mudanças, subtis mas substantivas, que permitem considerar com seriedade as questões do conteúdo matemático. Por exemplo, quando André, olhando para o caderno, diz que a primeira conjectura do seu grupo *Foi o número central e um quatro ao lado,* a professora reformula-a, expandindo-a: *O grande total é igual ao número central e um quatro ao lado. É isto?* O mesmo acontece com o enunciado da conjectura de Tomás: *É o número do centro vezes dez mais quatro...; Professora: (...) O Tomás disse que o grande total é igual ao número do centro vezes dez mais quatro...*

Repare-se que, em qualquer das intervenções dos alunos, uma parte essencial da conjectura está implícita. Apenas através do que dizem não se fica a saber o que se pretende relacionar nem que a relação é de igualdade. A professora não altera o significado, mantendo, assim, a autoria das intervenções nos alunos. No entanto, articula informação pressuposta, o que contribui para que as conjecturas sejam expressas de modo claro, coerente e não ambíguo. Facilita, assim, a aprendizagem do próprio processo de formulação de conjecturas, que nem sempre é simples para os alunos. Na última intervenção do episódio, há também uma reformulação de parte do que Teresa diz, que clarifica a ideia desta aluna e, simultaneamente, introduz uma maior correcção matemática: *A Teresa está a dizer que não percebe porque é que para obter o grande total se pode multiplicar o número do centro por dez e adicionar quatro.*

De entre os vários aspectos favoráveis à construção e manutenção de uma cultura de integração, focaram-se apenas dois:

- a reformulação, pelo professor, de certas contribuições dos alunos de modo a abrir caminho para ideias ou processos matemáticos que pretende ensinar,
- a negociação de normas de acção e interacção com determinadas características.

Ambos são considerados, por diversos autores, propícios ao envolvimento dos alunos em discussões genuínas de ideias matemáticas e, por esta via, à integração de conteúdos e processos matemáticos.

Entende-se que uma cultura de sala de aula regida por normas do tipo das indicadas, constitui o pano de fundo para que a turma se possa assumir como um auditório interveniente, informado e crítico das ideias que surgem no espaço da aula. Como se referiu, a apropriação, pelos alunos, destas normas não é fácil. No entanto, parece ser significativamente facilitada pela conjunção de três atributos no decurso do processo de negociação (Boavida, 2005):

- *sistematicidade e persistência;*
- *contextualização*;
- *coerência*.

Sistematicidade e persistência, remetem para a necessidade de um investimento continuado e não pontual no processo de negociação. Contextualização prende-se com a importância da negociação de normas se enraizar nos acontecimentos da aula. Coerência traduz a essencialidade de existir uma forte e sistemática consistência entre o que explicitamente se diz e o que implicitamente se veicula através do modo como se age.

Há aspectos relacionados com o processo de negociação que, em certa medida, podem ser antecipados pelo professor. Decidir, na fase da preparação da aula, que se solicitarão explicações, justificações, comentários, ou que se irá remeter para os alunos a avaliação das ideias que surgem, são exemplos destes aspectos. No entanto, como se procurou ilustrar a partir dos episódios apresentados, o essencial deste processo parece passar, sobretudo, por improvisações feitas no momento, com base na actividade desenvolvida pelos alunos. Estas improvisações requerem uma atenção permanente e abrangente ao que acontece e um lúcido e rápido discernimento para saber o que dizer e, em particular, para encontrar os modos mais adequados de lidar com transgressões às normas que se procuram negociar, que não se sabe se surgirão nem de que forma se irão revestir.

Conclusão

Os quatro primeiros capítulos desta publicação focam-se em processos que fazem parte da actividade desenvolvida pelos investigadores em Matemática no decurso da produção de conhecimento matemático: *resolver problemas, estabelecer conexões, comunicar* e *argumentar*. O pressuposto de que se parte é que estes processos são também fundamentais na aprendizagem da Matemática, desde o início do 1.º ciclo do ensino básico.

Poder-se-á estranhar este paralelismo entre a actividade dos matemáticos e a actividade dos alunos. Na verdade, os contextos em que a actividade se desenvolve não são semelhantes e as suas motivações, objectivos e maturidade matemática são bem diferentes.

Afinal, o que têm de comum a actividade matemática vista a estes dois níveis? Mesmo sabendo que um investigador continua a ser um estudante, poderão comparar-se os seus processos mentais, dirigidos para a invenção e descoberta, com os de um aluno? Um dos autores que abordou esta questão foi o matemático Poincaré (1908, 1948). Os seus argumentos apontam para a existência de paralelismo entre o processo de invenção e o de aprendizagem matemática, em particular no que diz respeito ao papel da intuição.

Não se pode pôr em dúvida que a *resolução de problemas* faz parte da actividade dos cientistas, nomeadamente dos matemáticos. Confrontar os alunos com problemas é uma orientação curricular reconhecida como essencial por diversas entidades ligadas ao ensino da Matemática. Facilita o desenvolvimento do raciocínio, da organização do pensamento e da capacidade de elaborar estratégias para lidar com situações desconhecidas, pelo que estimula a maturidade intelectual. Podemos dizer que a facilidade de integração de um jovem na sociedade tecnológica se pode medir pela sua capacidade de resolver problemas.

Embora alguns matemáticos célebres, como é o caso de Hardy, tenham declarado que a sua actividade não tem a mínima ligação com o real, na verdade, *o estabelecimento de conexões* faz parte integrante do trabalho matemático. Nalguns casos elas são evidentes, noutros estão de alguma forma ocultas, tendo por vezes demorado séculos a desvendar. Um dos exemplos mais célebres da História da Matemática é o caso das cónicas. Estudadas na Antiga Grécia, essencialmente por Apolónio (260-190 a.C.), as cónicas eram curvas interessantes e belas mas "não serviam para nada", até que Kepler (1571-1630) as usou, vários séculos depois, para descrever as trajectórias dos corpos celestes. Actualmente, as utilizações das cónicas são inúmeras.

O estabelecimento de conexões pode, por um lado, ser fonte de motivação para os alunos. Por outro lado, representa um desafio para professores que podem usá-las para delinear contextos de ensino e aprendizagem favoráveis ao aprofundamento do conhecimento matemático. Em particular, podem encontrar situações onde a Matemática está presente de várias maneiras, descobrir exemplos de Matemática "oculta" em diversas actividades que fazem parte do quotidiano e, ainda, pôr em evidência as interacções da Matemática com outras áreas curriculares ou culturais.

A prática de *comunicar* resultados, de partilhar conhecimentos e de discutir ideias, é essencial para quem se dedica à produção científica. Essa prática, que tem uma longa tradição na História da Ciência, está pouco presente na escola actual, sobretudo quando se trata de ensinar Física, Química, ou Matemática, onde, frequentemente, o conhecimento se mede mais pelo "saber fazer" do que pelo enunciar, justificar ou questionar.

Comunicação é uma palavra muito gasta, que de tanto ser usada acabou por se esvaziar de sentido. Nesta publicação, tentou dar-se-lhe significado através dos episódios e tarefas apresentados. Comunicar remete para dialogar e discutir, o que nem sempre é fácil de dinamizar dado que o professor, sem descurar a liderança, precisa de harmonizar diferentes vozes e estabelecer equilíbrios entre contributos diversos. Remete, também, para escrever a partir da Matemática, e sobre Matemática, aspecto fundamental na organização e estruturação do pensamento, pelo que é indispensável dedicar-lhe especial atenção na sala de aula. Nada disto é possível sem mobilizar representações e linguagens adequadas aos raciocínios e aos objectos matemáticos em uso.

Não será necessário defender o papel de *argumentar em Matemática* como parte integrante da actividade do investigador matemático, já que, muitas vezes, se caracteriza esta ciência pela elevada importância atribuída à argumentação e à prova. Frequentemente, raciocínios de tipo argumentativo estão subjacentes à resolução de exercícios ou problemas embora, por vezes, permaneçam ocultos. Explicitar estes raciocínios pode trazer mais-valias diversas, não só porque o aluno toma consciência da sua existência e necessidade, mas sobretudo, porque esta actividade lhe permite apropriar-se das regras internas ao funcionamento da própria Matemática. São estas regras que legitimam ou invalidam descobertas e conclusões em Matemática.

Os processos matemáticos referidos não são disjuntos. Pelo contrário, entrelaçam-se, fortemente, quando se trata de lidar com situações complexas estejam elas ligadas à Matemática, ou não. O último capítulo, *Integrando conteúdos e processos matemáticos,* visa, precisamente, destacar esta ideia. Explorar, na sala de aula, exemplos que integrem vários destes processos é, também, ensinar a raciocinar matematicamente.

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: ME-DEB.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in Mathematics, 18* (2), 147-176.

Ball, D. e Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. Em J. Kilpatrick, W. Martin e D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). Reston: NCTM.

Baruck, S. (1985). *L' âge du capitaine – De l' érreur en mathématiques.* Paris: Éditions du Seuil.

Boavida, A.M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Boavida, A. M. e Guimarães, F. (2002). Materiais para a aula de Matemática. *Educação e Matemática, 70,* 26-7.

Bruner (1962). *The process of education.* Cambridge: Harvard University Press.

Burns, M. (1996). *50 problem-solving lessons grades 1-6.* U.S.A.: Math Solutions Publications.

Caraça, B. J. (1984). *Conceitos fundamentais da Matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Castelnuovo, E. (1982). Para um ensino da Matemática capaz de produzir cultura científica. Em Sociedade Portuguesa de Matemática (Ed.) *Ensino da Matemática Anos 80* (pp.29-41). Lisboa: SPM.

Chazan, D. e Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics, 19* (2), 2-10.

Davis, P. e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Dolk, M., Fosnot, C., Hersch, S. e Cameron, A. (2005). *Working with the array: Mathematical models.* Portsmouth: Heinemann.

Englert, G. R. e Sinicrope, R. (1997). Fazendo conexões com a multiplicação de dois algarismos. *Educação e Matemática, 42,* 39-42.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp.25-48). Lisboa: APM.

Findell, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Greenes, C., Sheffield, L. e Small, M. (2004). *Navigating Through Problem Solving and Reasoning in Grade 1.* Reston: NCTM.

Fosnot, C. e Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth: Heinemann.

Greenes, C., Dacey, L., Cavanagh, M., Findell, C., Sheffield, L. e Small, M. (2004). *Navigating Through Problem Solving and Reasoning in Prekindergarten-Kindergarten.* Reston: NCTM.

Heuvel-Panhuizen, M e Buys, K. (Eds.) (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry.* Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Johnson, D. (1982). *Every Minute Counts.* Palo Alto: Dale Seymour.

Kabiri, M. e Smith, N. (2003). Turning traditional textbook problems into open-ended problems. *Mathematics teaching in the middle school, 9* (3) pp.186-192.

Kilpatrick, J., Martin, W. e Schifter, D. (Eds.) (2003). *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Em P. Cobb e H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

Magalhães, A. (1988). *Histórias pequenas de bichos pequenos.* Porto: Edições Asa.

Mason, J., Burton, L. e Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* Bristol: Addison--Wesley.

Matos, J. M. e Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação (1990). *Ensino Básico 1.º ciclo. Reforma Educativa.* Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional para o ensino básico. Competências essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

Moreira, D. e Oliveira, I. (2003). *Iniciação à Matemática no Jardim de Infância.* Lisboa: Universidade Aberta.

National Council of Teachers of Mathematics (2004). *Professional Development Guidebook for Perspectives on the Teaching of Mathematics.* Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2001). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Colecção Adendas, 4º ano.* Lisboa: APM

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Colecção Adendas, 3º ano.* Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Colecção Adendas, 1º ano.* Lisboa: APM

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Colecção Adendas, 2º ano.* Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa: IIE, APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Addenda Series.* Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: IIE, APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980s.* Reston: NCTM.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques.* Tese de doutoramento não publicada. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/Université de Genova, Itália.

Perelman, C. (1993). *O império retórico: Retórica e argumentação.* Porto: Edições ASA.

PISA (2003). *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação da resolução de problemas.* OCDE. Lisboa: ME-GAVE.

Poincaré, H. (1908). L'invention matemátique. *L'Enseignement mathématique, 10,* 357-371.

Poincaré, H. (1948). L'Intuition e la logique en mathématiques. Em *La valeur de la Science* (pp. 11-34). Paris: Flammarion.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J. P. e Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ramalho, G., (coordenador). (2002). PISA 2000 – *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses.* Lisboa: Ministério da Educação/Gave.

Reinhart, (2000), Never say anything a kid can say. *Mathematics teaching in the middle school 5* (8) 478 – 483.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D. e Smith, N. (2007). *Helping Children Learn Mathematics.* USA. John Wiley & Sons.

Rocha, N. (1990) (Ed.) *Verso aqui, verso acolá: Antologia para jovens.* Lisboa: Plátano Editora.

Sakshaug, L., Olson, M. e Olson, J. (2002). *Children are mathematical problem solvers.* Reston: NCTM.

Schwartz, S. e Curcio, F. (1995). Learning Mathematics in Meaningful Contexts: An Action-Based Approach in the Primary Grades. Em P. House e A. Coxford, (Eds) *Connecting Mathematics Across the Curriculum* (pp. 116 - 123). Reston: NCTM.

Small, M. , Sheffield, L., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., Greenes, C. (2004). *Navigating Through Problem Solving and Reasoning in Grade 2.* Reston: NCTM.

Souviney, R. (2005). *Solving math problems kids care about.* Tucson: Good Year Books.

Stevenson, F. (2001). *Exploratory Problems in Mathematics.* Reston: NCTM.

TIMSS (1996-1999). *Higlights of Results from TIMSS, Primary School Years: Middle School Years.* Boston: TIMSS International Study Center.

Toulmin, S. (1993). *Les usages de l’argumentation.* Paris: PUF.

Vale, I. e Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. Em Pedro Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do ensino básico* (pp.7-51). Lisboa: Lidel.

Veia, L., (1996). *A resolução de problemas e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico: Três estudos de caso.* Lisboa: APM.

Yackel, E. e Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin e D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227- 236). Reston: NCTM.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T. Wheatley, G. e Merkel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação e Matemática 18,* 17- 21.

Yeats, K., Battista, M., Mayberry, S., Thompson, D. e Zawojewski, J. (2004). *Navigating Through Problem Solving and Reasoning in Grade 3.* Reston: NCTM.

Yeats, K., Battista, M., Mayberry, S., Thompson, D. e Zawojewski, J. (2004). *Navigating Through Problem Solving and Reasoning in Grade 4.* Reston: NCTM.

Way, J. (2001). *Using questioning to stimulate Mathematical Thinking* (Disponível em http://nrich.maths.org/public/. Acesso em 15/12/2006)

Whitin, P. e Whitin, D. (2002). Promoting Communication in the Mathematics Classroom. *Teaching Children Mathematics 9,* (4), 205 – 211.

Sites consultados

http://nrich.maths.org/public/

http://www.figurethis.org/

http://www.nctm.org/